



برترین مراجع تخصصی برای دانشجویان و فعالان حوزه آموزش و فناوری



info@kolbedanesh.com

www.kolbedanesh.com

به نام خدا

هرگونه چاپ و تکثیر از محتویات این اثر بدون اجازه کتبی ناشر ممنوع است.
متخلصان به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از مؤلفان، مصنفان و هنرمندان
تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه است.

دینامیک

مجموعهٔ مهندسی مکانیک

دکتر رضا تیموری

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه



ویرایش چهارم: بهار ۸۶ | تیراز: ۲۵۰۰ نسخه |
شابک: ۹۶۴-۸۷۱۹-۱۵-۲ | ISBN: 964-8719-15-2

نشانی: بالاتر از میدان ولی عصر | کوچه دانش کیان | ساختمان پارسه | تلفن: ۸۸۸۴۹۲۱۱

مقدمه

درس دینامیک از جمله درس‌های مهم در کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک می‌باشد. همان‌طور که می‌دانیم برای این درس کتاب‌های مرجع متعددی در دانشگاه‌های ایران مورد استفاده قرار می‌گیرند که به دلیل حجم بالای آن‌ها مطالعه همه آن‌ها به‌طور کامل دشوار می‌نماید، بنابر این لزوم تهیه یک جزو فشرده و در عین حال جامع احساس می‌شود. در این جزو ضمن ارایه موضوعات مهم درسی و دسته‌بندی آن‌ها بر مبنای سوالات کنکور کارشناسی ارشد، تست‌های نمونه مربوط به هر بخش درس از میان سوالات کنکور کارشناسی ارشد استخراج شده و حل شده‌اند. در پایان هر بخش جمع‌بندی مطالب که عموماً در قالب جداول تهیه شده‌اند، برای مراجعه سریع و آسان به چکیده مطالب ارایه شده است که مطالعه مجدد آن‌ها چند روز قبل از کنکور توصیه می‌گردد.

دکتر رضا تیموری
بهار ۱۳۸۶

فصل اول دینامیک ذرات

۲	تعابیر هندسی سرعت و شتاب
۳	حرکت ذره در مسیر دایروی
۴	الف) اگر شتاب مقدار ثابت باشد
۴	ب) اگر شتاب تابعی از زمان باشد
۴	ج) اگر شتاب تابعی از مکان باشد
۵	د) اگر شتاب تابعی از سرعت باشد
۶	حرکت منحنی الخط در صفحه
۶	الف - دستگاه مختصات دکارتی
۷	ب - دستگاه مختصات استوانه‌ای (دستگاه مختصات قطبی)
۸	ج - دستگاه مختصات قائم و مماسی
۹	د - دستگاه مختصات کروی
۱۰	جمع‌بندی
۱۴	رابطه سرعت‌ها و شتاب‌های نسبی و دستگاه‌های چرخان
۱۶	جمع‌بندی
۱۶	مفهوم شتاب کربولیس
۱۹	قانون دوم نیوتون و اصل دالامبر

فصل دوم کار و انرژی

۲۲	محاسبه کار نیروی فنر
۲۳	محاسبه کار نیروی وزن
۲۳	محاسبه کار نیروی گرانش
۲۴	انواع نیروها
۲۴	شرط پایستار بودن نیروها
۲۵	قضیه کار و انرژی
۲۵	قانون بقای انرژی

۲۵.....	اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای
۲۶.....	قانون بقای اندازه حرکت خطی
۲۶.....	قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای
۲۶.....	جمع‌بندی

فصل سوم برخورد ذرات

۲۷.....	معادلات در راستای عمود بر ضربه
۲۸.....	معادلات در راستای ضربه
۲۹.....	جمع‌بندی
۴۱.....	قوانين بقا
۴۱.....	مثال (۱)
۴۳.....	مثال (۲)
۴۴.....	مثال (۳)
۴۵.....	مثال (۴)

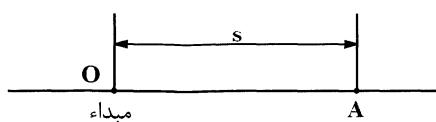
فصل چهارم دینامیک اجسام صلب

۴۶.....	الف) حرکت انتقالی
۴۶.....	ب) حرکت دورانی
۴۷.....	ج) حرکت عمومی
۴۷.....	اصل دالامبر
۴۷.....	الف - جسم حول نقطه ثابت O (مرکز دائمی دوران) دوران می کند
۴۸.....	ب - جسم دارای حرکت عمومی است
۴۹.....	ج - اگر مرکز آنی دوران جسم مشخص باشد
۴۹.....	د - اگر روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه O نوشته شود که امتداد سرعت و شتاب آن نقطه از مرکز جرم بگذرد
۵۰.....	انرژی جنبشی
۵۰.....	الف - جسم دارای حرکت عمومی است
۵۰.....	ب - جسم دارای مرکز دوران است
۵۰.....	جمع‌بندی
۵۱.....	تحلیل سه بعدی
۵۲.....	معادلات اویلر در حالت خاص
۵۳.....	روابط لختی چند جسم صلب
۵۳.....	مثال‌هایی از دینامیک اجسام صلب
۶۲.....	تست‌های نمونه

فصل اول

دینامیک ذرات

حرکت مستقیم الخط (Rectlinear Motion) : حرکتی که در آن ذره بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و موقعیت‌اش نسبت به یک نقطه بهنام مبدأ (نقطه O) مشخص می‌شود. متغیر s مکان ذره در زمان t می‌باشد.



اگر مکان ذره در زمان t_1 ، s_1 و در زمان t_2 ، s_2 باشد سرعت متوسط و لحظه‌ای ذره به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{سرعت متوسط})$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (\text{سرعت لحظه‌ای})$$

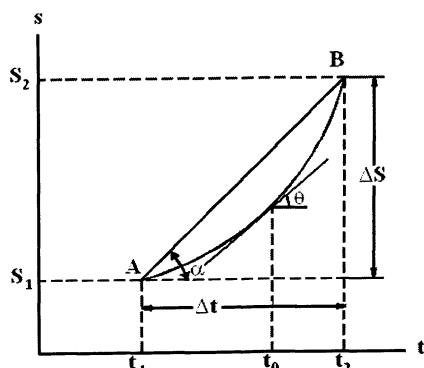
به طور مشابه شتاب متوسط و لحظه‌ای نیز تعریف می‌شوند.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{شتاب متوسط})$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (\text{شتاب لحظه‌ای})$$

که در آن v_1 سرعت ذره در زمان t_1 و v_2 ذره در زمان t_2 می‌باشد.

تعابیر هندسی سرعت و شتاب:

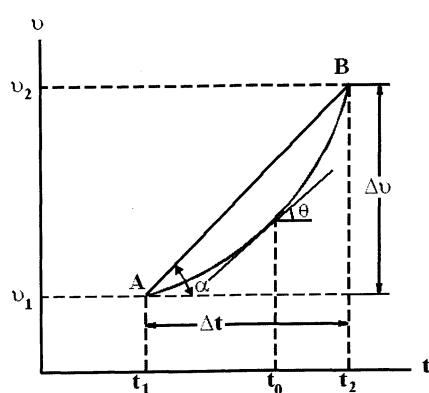


$$\tan \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{av}$$

$$\tan \theta = s(t_0) = v(t_0)$$

سرعت متوسط بین زمان‌های t_1 و t_2 ، شیب خط قاطع بر منحنی مکان - زمان بین آن دو لحظه می‌باشد.

سرعت لحظه‌ای در زمان t_0 ، شیب خط مماس بر منحنی مکان - زمان در زمان t_0 می‌باشد.



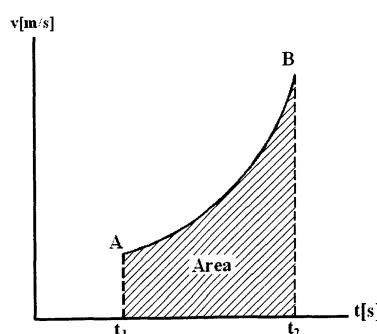
$$\tan \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{av}$$

$$\tan \theta = \dot{v}(t_0) = a(t_0)$$

شتاب متوسط بین زمان‌های t_1 و t_2 ، شیب خط قاطع بر منحنی سرعت - زمان بین آن دو لحظه زمان می‌باشد.

شتاب لحظه‌ای در زمان t_0 ، شیب خط مماس بر منحنی سرعت - زمان در زمان t_0 می‌باشد.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt \Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \text{Area}$$



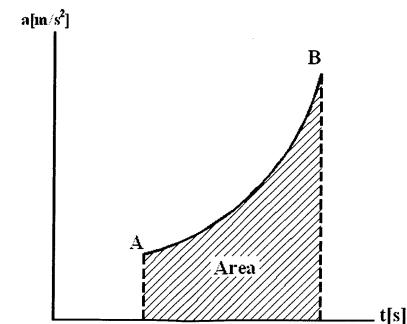
سطح زیر منحنی سرعت - زمان بین زمان‌های t_1 و t_2 مسافت طی شده بین

این دو لحظه زمان می‌باشد. واحد این سطح $\frac{m}{s}$ خواهد بود که با

هم واحد می‌باشد.

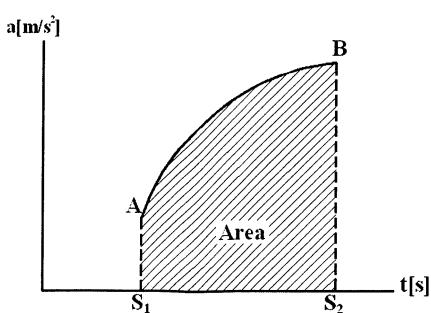
$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt \Rightarrow \Delta v_1 = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt = \text{Area}$$

۳ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | دینامیک ذرات



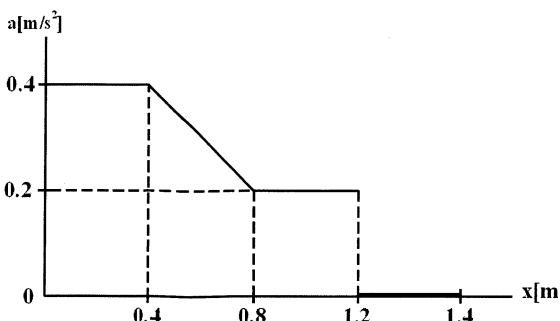
سطح زیر منحنی شتاب - زمان بین زمان‌های t_1 و t_2 ، تغییرات سرعت بین این دو لحظه زمان می‌باشد. واحد این سطح خواهد بود که با $\frac{m}{s^2} \times s = \frac{m}{s}$ هم واحد می‌باشد.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{v}{a} = \frac{ds}{dv} \Rightarrow v dv = ads \\ \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} v dv &= \int_{s_1}^{s_2} ads \Rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} ads \end{aligned}$$



سطح زیر منحنی شتاب - مکان بین مکان‌های s_1 و s_2 ، برابر است با: نصف تفاضل مجذور سرعت‌های ذره در این دو مکان.

تست سال (۷۶-۷۷)



$$\begin{aligned} v_0 &= 0.1, \quad \text{Area} \\ &= 0.4 \times 0.4 + \left(\frac{0.4+0.2}{2} \right) \times 0.4 + 0.2 \times 0.4 \\ &= 0.36 = \frac{1}{2} (v^2 - (0.1)^2) \\ \Rightarrow v(x=1.4) &= 0.85 \left[\frac{m}{s} \right] \end{aligned}$$

حرکت ذره در مسیر دایروی:

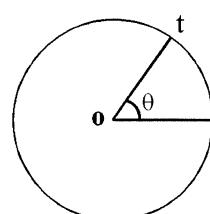
سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad \text{سرعت زاویه‌ای متوسط}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dot{\theta} \quad \text{سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای}$$

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \text{شتاب زاویه‌ای متوسط}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} \quad \text{شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای}$$



(۶۹ - ۷۰) تست سال

عبارت سرعت زاویه‌ای در حرکتی به صورت $\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}(1-\cos\theta)}$ می‌باشد. شتاب زاویه‌ای برابر است با:

$$\text{هیچ‌کدام} \quad (٤)$$

$$\frac{g}{a}(1-\sin\theta) \quad (٣)$$

$$\frac{g \sin \theta}{\sqrt{\frac{2g}{a}(1-\cos\theta)}} \quad (٢)$$

$$\frac{g \sin \theta}{a} \quad (١)$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{\frac{2g}{a} \dot{\theta} \sin \theta}{2\sqrt{\frac{2g}{a}(1-\cos\theta)}} = \frac{\frac{g}{a} \omega \sin \theta}{\dot{\theta}} = \frac{g}{a} \sin \alpha$$

جواب گزینه (١) می‌باشد.

در مسایل مختلف می‌تواند شتاب تابعی از زمان، مکان، سرعت و یا ثابت باشد و این تابعیت معلوم باشد. در این صورت می‌توان روابط سرعت و مکان را به دست آورد. نحوه محاسبه روابط مذکور به صورت زیر می‌باشد.

الف) اگر شتاب مقدار ثابت باشد:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t adt = a \int_0^t dt = at \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$s = \frac{ds}{dt} = f(t) \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

ب) اگر شتاب، تابعی از زمان باشد ($a=f(t)$)

$$a = \frac{dv}{dt} = f(t) \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt = g(t) \Rightarrow v = v_0 + g(t)$$

$$s = \frac{ds}{dt} = v_0 + g(t) \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + g(t)) dt \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \int_0^t g(t) dt \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + p(t)$$

ج) اگر شتاب، تابعی از مکان باشد ($a=f(s)$)

$$vdv = ads = f(s) ds \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds = g(s)$$

$$\Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = g(s) \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2g(s)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2g(s)} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(s)}} = p(s) \Rightarrow t = p(s) \Rightarrow$$

$$s = p^{-1}(t) \quad (p(t) \text{ تابع})$$

د) اگر شتاب، تابعی از سرعت باشد ($a=f(v)$)

روش اول:

$$\begin{aligned} a = \frac{dv}{dt} = f(v) &\rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = g(v) = \int_{t_0}^t dt = t \Rightarrow v = g^{-1}(t) \quad (g(t)) \\ v = \frac{ds}{dt} = g^{-1}(t) &\Rightarrow ds = g^{-1}(t) dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t g^{-1}(t) dt = p(t) \Rightarrow [s = s_0 + p(t)] \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} v dv = ads = f(v) ds &\Rightarrow \frac{v dv}{f(v)} = ds \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)} = g(v) = \int_{s_0}^s ds = s - s_0 \Rightarrow [s = s_0 + g(v)] \\ \Rightarrow v = g^{-1}(s - s_0) = \frac{ds}{dt} &\Rightarrow \int_0^t dt = \int_{s_0}^s \frac{ds}{g^{-1}(s - s_0)} = p(s) \Rightarrow t = p(s) \Rightarrow [s = p^{-1}(t)] \end{aligned}$$

مثال برای حالت (ج)

اگر $a = -k^2 s$ باشد (در سیستم جرم و فر، شتاب جرم a بر حسب جابه‌جایی جرم از رابطه مذکور تعیت می‌کند).

روش اول:

$$v dv = ads = -k^2 s ds \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = -k^2 \int_0^s s ds \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\frac{k^2 s^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2} \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = dt \Rightarrow \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = \int_0^t dt = t$$

از تغییر متغیر $\sin \alpha = \frac{ks}{v_0}$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos \alpha d\alpha = \frac{k}{v_0} ds \Rightarrow ds = \frac{v_0 \cos \alpha d\alpha}{k}, \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right)$$

$$t = \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right)} \frac{\frac{v_0}{k} \cos \alpha d\alpha}{\frac{v_0}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}} = \frac{1}{k} \sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right) \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right) = kt \Rightarrow [s = \frac{v_0}{k} \sin kt]$$

$$\Rightarrow [v = \frac{ds}{dt} = v_0 \cos kt]$$

روش دوم:

ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ik$

$$\Rightarrow s = A \cos kt + B \sin kt \Rightarrow s(0) = 0 = A, \quad \dot{s}(t) = k(-A \sin kt + B \cos kt)$$

$$\Rightarrow v(0) = v_0 = \dot{s}(0) = Bk \Rightarrow B = \frac{v_0}{k} \Rightarrow [s = \frac{v_0}{k} \sin kt]$$

مثال برای حالت (د)

اگر $v = -k^2 s$ باشد (در سیستم جرم متصل به دمپر، شتاب جرم a بر حسب سرعت جرم v از رابطه ذکر شده تعیت می‌کند).

روش اول:

$$\begin{aligned}
 vdv = ads = -k^2 vds &\rightarrow \int_{v_0}^v dv = -k^2 \int_{s_0}^s ds \rightarrow v - v_0 = -k^2 (s - s_0) \Rightarrow v = (v_0 + k^2 s_0) - k^2 s \\
 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -k^2 \left(s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2} \right) &\Rightarrow \frac{ds}{s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2}} = -k^2 dt \Rightarrow \int_{s_0}^s \frac{ds}{s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2}} = -k^2 \int_0^t dt = -k^2 t \\
 \Rightarrow \ln \left| \frac{s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2}}{\frac{-v_0}{k^2}} \right| = -k^2 t &\Rightarrow s = \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2} - \frac{v_0}{k^2} e^{-k^2 t} \Rightarrow \boxed{s = s_0 + \frac{v_0}{k^2} (1 - e^{-k^2 t})} \\
 \Rightarrow \boxed{v = v_0 e^{-k^2 t}}
 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned}
 a = -k^2 v = \frac{dv}{dt} \Rightarrow -k^2 dt = \frac{dv}{v} \Rightarrow -k^2 \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} \Rightarrow -k^2 t = \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) \\
 \Rightarrow \boxed{v = v_0 e^{-k^2 t}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v_0 e^{-k^2 t} \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = v_0 \int_{t_0}^t e^{-k^2 t} dt \Rightarrow \boxed{s = s_0 + \frac{v_0}{k^2} (1 - e^{-k^2 t})}
 \end{aligned}$$

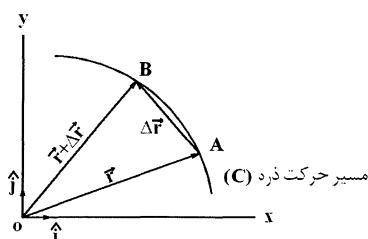
حرکت منحنی الخط در صفحه (Plane curvilinear motion)

در این بخش حرکت ذره در یک صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد و مولفه‌های سرعت و شتاب در دستگاه‌های مختصات زیر ارایه می‌شوند.

- الف - دستگاه مختصات دکارتی
- ب - دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت خاص قطبی
- ج - دستگاه مختصات قائم و مماسی
- د - دستگاه مختصات کروی

الف - دستگاه مختصات دکارتی:

ذره‌ای روی مسیر منحنی (c) حرکت می‌کند و در زمان t در نقطه A قرار دارد و در زمان $t + \Delta t$ به نقطه B حرکت می‌کند سرعت و شتاب ذره به صورت زیر تعریف می‌شوند.



$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad , \quad \vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

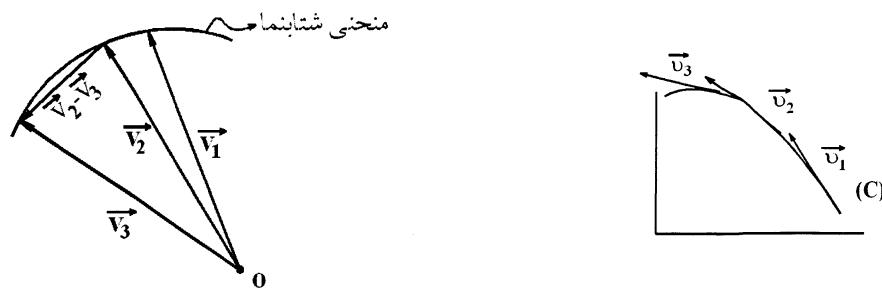
لذا سرعت دو مولفه افقی و عمودی $\dot{x}_x = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ و $\dot{y}_y = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ برداری است در راستای بردار $\Delta \bar{r}$ (خط قاطع بر نقاط A و B) در حالت حدی که $\Delta t \rightarrow 0$ نقطه B به A منطبق می‌شود و خط قاطع بر نقاط A و B به خط مماس بر نقطه A تبدیل می‌شود. بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای \bar{v} مماس بر مسیر خواهد بود.

$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (\text{شتاب متوسط})$$

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d \bar{v}}{dt} = \dot{v}_x \hat{i} + \dot{v}_y \hat{j} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

بنابراین بردار شتاب لحظه‌ای دارای دو مولفه افقی و عمودی $a_x = \ddot{x}$ و $a_y = \ddot{y}$ می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً دیدیم بردار سرعت لحظه‌ای همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد. بردار شتاب لحظه‌ای هم همواره مماس بر یک منحنی به نام منحنی شتاب‌نما (Hodograph) می‌باشد. برای ترسیم این منحنی در ابتدا از یک نقطه ثابت O بردارهای همسنگ سرعت نقاط مختلف مسیر حرکت ذره بر روی مسیر (C) را رسم می‌کنیم و سپس انتهای بردارهای ترسیم شده را به هم وصل می‌کنیم بدین ترتیب یک منحنی به دست می‌آید که منحنی شتاب‌نما نامیده می‌شود. چرا که خط قاطع بر این منحنی بردار تفاضل سرعت‌های لحظه‌ای دو موقعیت ذره را نشان می‌دهد که در حالت حدی به خط مماس که راستای شتاب لحظه‌ای را مشخص می‌کند تبدیل می‌شود.

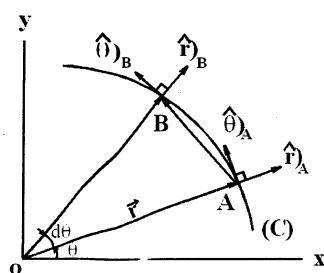


ب - دستگاه مختصات استوafته‌ای:

نخست به بررسی حالت خاص این دستگاه یعنی دستگاه مختصات قطبی می‌پردازیم.

دستگاه مختصات قطبی:

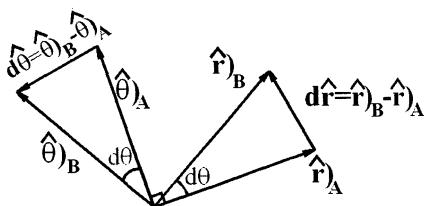
در این دستگاه بردار موقعیت از رابطه مقابله با دست می‌آید $\bar{r} = r \hat{r}$. بردارهای یکه این دستگاه \hat{r} و $\hat{\theta}$ هستند که با تغییر موقعیت ذره این بردارهای یکه نیز تغییر می‌کنند، لذا نسبت به زمان مشتق دارند.



$$|d\bar{r}| = 1 \times d\theta \Rightarrow \frac{d\bar{r}}{d\tau} = \left| \frac{d\bar{r}}{d\theta} \right| \hat{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \hat{\theta} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$|d\hat{\theta}| = 1 \times d\theta \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{d\tau} = \left| \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \right| (-\hat{r}) = \frac{d\theta}{d\tau} (-\hat{r}) = -\dot{\theta} \hat{r}$$

در روابط بالا $\frac{d}{d\tau}$ در مفهوم مشتق نسبت به زمان می‌باشد، بنابراین مشتق بردارهای یکه نسبت به زمان از روابط زیر محاسبه می‌شوند.



$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

روابط فوق برای محاسبه مولفه‌های سرعت و شتاب ذره به کار خواهند رفت.

روش کلی‌تری برای محاسبه مشتقهای برادریکه نسبت به زمان در هر دستگاه مختصات دلخواه وجود دارد. اگر $\hat{\lambda}$ بردار یکه دستگاه مختصات دلخواه باشد مشتق برادریکه نسبت به زمان، $\dot{\hat{\lambda}}$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\dot{\hat{\lambda}} = \bar{\omega} \times \hat{\lambda}$$

که در آن $\bar{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

مثلاً در دستگاه مختصات قطبی $\hat{k} = \dot{\theta} \hat{r}$ و بنابراین داریم:

$$\dot{\hat{r}} = \bar{\omega} \times \hat{r} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{r} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \bar{\omega} \times \hat{\theta} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{\theta} = \dot{\theta} (-\hat{r})$$

که همان جواب قبلی به‌دست آمدند. حال مولفه‌های سرعت و شتاب را محاسبه می‌نماییم.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r \hat{r}) = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} = \dot{r} \hat{r} + r(\dot{\theta} \hat{\theta}) = \dot{r} \hat{r} + (r \dot{\theta}) \hat{\theta} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$$

مولفه‌های سرعت در دستگاه مختصات قطبی $v_\theta = r \dot{\theta}$ و $v_r = \dot{r}$ می‌باشند.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{v}_r \hat{r} + v_r \dot{\hat{r}} + \dot{v}_\theta \hat{\theta} + v_\theta \dot{\hat{\theta}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta} \hat{\theta}) + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta} + r \dot{\theta}(-\dot{r} \hat{r})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$$

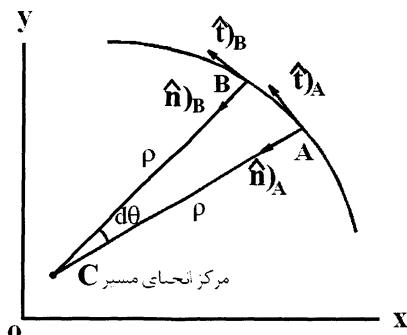
مولفه‌های شتاب در دستگاه مختصات قطبی $a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ و $a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$ خواهند بود.

برای دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای سرعت و شتاب عبارتند از :

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + (r \dot{\theta}) \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k} \Rightarrow v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k} \Rightarrow a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z}$$

ج) دستگاه مختصات قائم و مماسی : (Normal and tangential coordinates)



AB = طول کمان = $ds = \rho d\theta$

شعاع انحنای مسیر: ρ :

$$v_t = \dot{s} = \frac{ds}{d\tau} = \rho \frac{d\theta}{d\tau} = \rho \dot{\theta}$$

بردار سرعت مماسی $\vec{v}_t = v_t \hat{t} = \rho \dot{\theta} \hat{t}$

۹ | دینامیک ذرات | پارسه آزاد از دستگاه آموزش عالی آزاد

در این دستگاه بردارهای یکه عمود بر مسیر، \hat{n} و مماس بر مسیر \hat{t} با حرکت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند لذا نسبت

به زمان مشتق دارند که از رابطه $\dot{\lambda} = \vec{\omega} \times \hat{\lambda}$ این مشتقات محاسبه خواهند شد. در این دستگاه $\hat{k} = \vec{\omega} \times \hat{n}$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$\dot{\hat{n}} = \vec{\omega} \times \hat{n} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{n} = \dot{\theta} \hat{t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\hat{n}} = -\dot{\theta} \hat{t}}$$

$$\dot{\hat{t}} = \vec{\omega} \times \hat{t} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{t} = \dot{\theta} \hat{n} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\hat{t}} = \dot{\theta} \hat{n}}$$

$$\ddot{\vec{a}} = \ddot{\vec{v}_t} = \dot{\vec{v}_t} \hat{t} + \vec{v}_t \dot{\hat{t}} = \dot{\vec{v}_t} \hat{t} + \vec{v}_t (\dot{\theta} \hat{n}) = \dot{\vec{v}_t} \hat{t} + \vec{v}_t \left(\frac{v_t}{\rho} \right) \hat{n} = \dot{\vec{v}_t} \hat{t} + \frac{v_t^2}{\rho} \hat{n} = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$$

$$\boxed{a_t = \dot{\vec{v}_t}}, \quad \boxed{a_n = \frac{v_t^2}{\rho}}$$

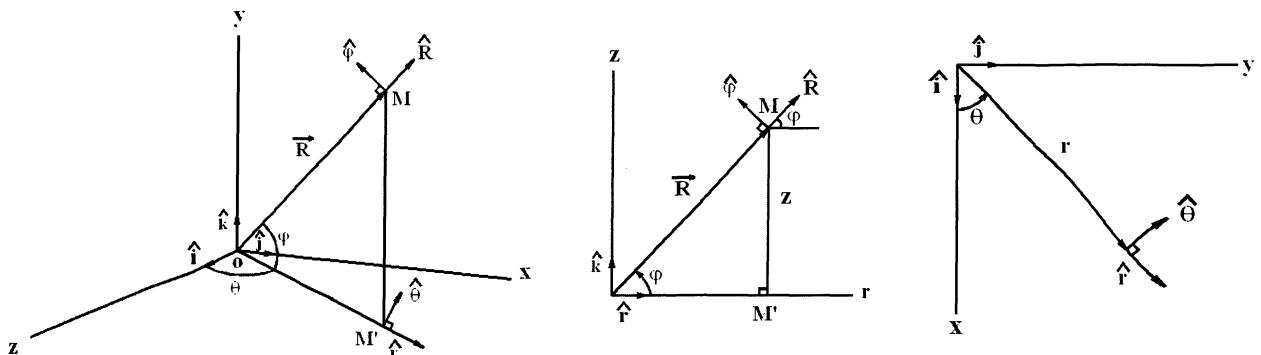
بنابراین در دستگاه مختصات قائم و مماسی مولفه‌های نرمال و مماسی شتاب به ترتیب: a_t و a_n می‌باشند.

نکته ۱: مولفه‌های مماسی شتاب a_t ، نرخ زمانی تغییر اندازه سرعت ذره را نشان می‌دهد و اگر اندازه سرعت ثابت باشد این مولفه صفر خواهد بود.

نکته ۲: مولفه نرمال شتاب، a_n ناشی از تغییرات جهت سرعت می‌باشد و اندازه آن از رابطه $a_n = \frac{v_t^2}{\rho}$ محاسبه می‌شود بدیهی است

که اگر مسیر حرکت یک خط راست باشد، شعاع انحنای مسیر بی‌نهایت خواهد بود و لذا شتاب نرمال صفر خواهد بود.

د - دستگاه مختصات کروی (Spherical Coordinates)



در این دستگاه مختصات مختصه‌ها (R, θ, ϕ) هستند. بردارهای یکه این دستگاه \hat{R} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ هستند که با حرکت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند، لذا نسبت به زمان مشتق دارند و این مشتقات از رابطه $\dot{\lambda} = \vec{\omega} \times \hat{\lambda}$ محاسبه می‌شوند. در این دستگاه $\dot{\hat{R}} = \vec{\omega} \times \hat{R} = (\dot{\theta} \hat{k} - \dot{\phi} \hat{\theta}) \times \hat{R} = \dot{\theta} (\hat{k} \times \hat{R}) - \dot{\phi} (\hat{\theta} \times \hat{R})$ می‌باشد، لذا داریم: $\dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta} \hat{k} - \dot{\phi} \hat{\theta}$ می‌باشد، لذا داریم: از طرفی داریم:

$$\hat{k} \times \hat{R} = |\hat{k}| |\hat{R}| \sin(\hat{k}, \hat{R}) \hat{\theta} = 1 \times 1 \sin(90 - \phi) \hat{\theta} = (\cos \phi) \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{R} = -\hat{\phi}$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$\dot{\hat{R}} = (\dot{\theta} \cos \phi) \hat{\theta} + \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \vec{\omega} \times \hat{\theta} = (\dot{\theta} \hat{k} - \dot{\phi} \hat{\theta}) \times \hat{\theta} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{\theta} = -\dot{\theta} \hat{t}$$

ما معمولاً مشتقات بردارهای یکه در یک دستگاه را بر حسب بردارهای یکه در آن دستگاه بیان می‌کنیم بنابراین می‌بایستی \hat{r} را نیز بر حسب بردارهای یکه دستگاه مختصات کروی بیان کنیم. مطابق شکل بالا زاویه بردار یکه \hat{r} با بردارهای یکه $\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ به ترتیب $\varphi - \frac{\pi}{2} + \Phi$ -می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\hat{r} = \cos(-\varphi)\hat{R} + \hat{\phi} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = (\cos\varphi)\hat{R} - (\sin\varphi)\hat{\phi} \rightarrow \dot{\hat{r}} = -(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{R} + (\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{\phi}} = \bar{\omega} \times \hat{\phi} = (\dot{\theta}\hat{k} - \dot{\phi}\hat{\theta}) \times \hat{\phi} = \dot{\theta}\hat{k} \times \hat{\phi} - \dot{\phi}\hat{\theta} \times \hat{\phi}$$

از طرفی داریم:

$$\hat{k} \times \hat{\phi} = |\hat{k}| |\hat{\phi}| \sin\left(\hat{k}, \hat{\phi}\right) (-\hat{\theta}) = 1 \times 1 \times \sin\varphi (-\hat{\theta}) = -(\sin\varphi)\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{R}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\dot{\hat{\phi}} = -(\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\theta} - \dot{\phi}\hat{R}$$

بردار موقعیت در این دستگاه عبارت است از:

$$\vec{R} = R \hat{R}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \dot{R} \hat{R} + R \dot{\hat{R}} = \dot{R} \hat{R} + R [(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi}]$$

بردار سرعت به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{R} \hat{R} + (R\cos\varphi)\dot{\theta}\hat{\theta} + R\dot{\phi}\hat{\phi} = v_R \hat{R} + v_\theta \hat{\theta} + v_\varphi \hat{\phi}$$

بنابراین مولفه‌های سرعت در این دستگاه می‌باشند. به دلیل طولانی بودن روابط مربوط به مولفه‌های شتاب از ارایه آن‌ها خودداری می‌شود.

جمع‌بندی:

	دستگاه مختصات دکارتی	دستگاه مختصات قائم و مماسی	دستگاه مختصات استوانه‌ای (در حالت خاص قطبی)	دستگاه مختصات کروی
بردارهای یکه و مختصات	$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ x, y, z	\hat{n}, \hat{t} ρ, θ	$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}$ r, θ, z	$\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ R, θ, φ
مشتقهای بردارهای یکه	$\dot{\hat{i}} = \vec{0}$ $\dot{\hat{j}} = \vec{0}$ $\dot{\hat{k}} = \vec{0}$	$\dot{\hat{n}} = -\dot{\theta}\hat{t}$ $\dot{\hat{t}} = \dot{\theta}\hat{n}$	$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$ $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{r}\hat{r}$ $\dot{\hat{k}} = \vec{0}$	$\dot{\vec{R}} = (\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi}$ $\dot{\theta} = -(\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{R} + (\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\phi}$ $\dot{\phi} = -\dot{\phi}\hat{R} - (\dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\theta}$
مولفه‌های سرعت	$v_x = \dot{x}$ $v_y = \dot{y}$ $v_z = \dot{z}$	$v_t = \rho\dot{\theta}$	$v_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ $v_\theta = r\dot{\theta}$ $v_z = \dot{z}$	$v_R = \dot{R}$ $v_\theta = (R\cos\varphi)\dot{\theta} = r\dot{\theta}$ $v_\varphi = R\dot{\phi}$
مولفه‌های شتاب	$a_x = \ddot{x}$ $a_y = \ddot{y}$ $a_z = \ddot{z}$	$a_n = \frac{v_t^2}{\rho}$ $a_t = \dot{v}_t$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ $a_z = \ddot{z}$	$a_R = \dots$ $a_\theta = \dots$ $a_\varphi = \dots$
بردارهای سرعت زاویه‌ای	-	$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$	$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$	$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k} - \dot{\phi}\hat{\theta}$

۱۱ | دینامیک ذرات | آزاد پارسه | آموزش عالی آزاد

تست سال (۷۰ - ۶۹)

در مسیر دایره‌ای شکل حرکت یک هواپیما هنگام مانور در نقطه A شتاب کل هواپیما برابر $20 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ است. اگر سرعت هواپیما ۷۲۰ باشد و با نرخ ۳۶ کیلومتر در ساعت افزایش یابد، شعاع مسیر در نقطه A برابر است با:

۴) هیچ‌کدام

۵) ۳۰۰۰ m

۶) ۲۳۱۰ m

۷) ۴۲۰۰ m

$$v_t = 720 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = \frac{720}{3.6} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = 200 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

از آنجایی که نرخ تغییر اندازه سرعت ۳۶ کیلومتر در ساعت می‌باشد با ثابت فرض کردن این نرخ نسبت به زمان می‌توان گفت که

$$a_t = v_t = 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = \frac{36}{3.6} \text{ متر در ثانیه افزایش می‌یابد و یا داریم:}$$

$$\begin{aligned} a_t &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 20 \Rightarrow \left(\frac{v_t^2}{\rho} \right)^2 + 10^2 = 20^2 \Rightarrow \left(\frac{(200)^2}{\rho} \right)^2 = 300 \Rightarrow \rho^2 = \frac{200^4}{300} \\ &\Rightarrow \rho = \frac{(200)^2}{10\sqrt{3}} = 2310 \text{ m} \end{aligned}$$

جواب گزینه (۶) می‌باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۴)

متحرکی با سرعت اولیه صفر در مسیر دایروی به شعاع R شروع به حرکت می‌کند، اگر شتاب مماسی a_t متحرک a_0 فرض شود، مقدار شتاب کل متحرک پس از طی یک دور کامل مسیر چقدر می‌باشد؟

۱) $a_0 \sqrt{1+16\pi^2}$

۲) $4\pi a$

۳) $a_0 \sqrt{1+4\pi^2}$

۴) 0

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R} \right)^2 + a_0^2}$$

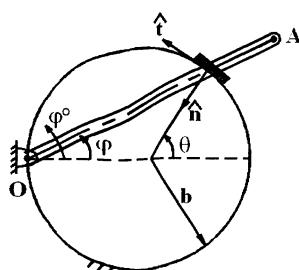
سرعت پس از یک دور کامل مسیر

$$z = \sqrt{\left(\frac{4\pi R a_0}{R} \right)^2 + a_0^2} = a_0 \sqrt{1+16\pi^2}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۷)

مهره کوچک P بر روی مسیر دایره‌ای شکل ثابت به شعاع b حرکت می‌کند. میله OA از مهره P عبور کرده و حول نقطه ثابت O بر روی حلقه با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}$ دوران می‌کند. اگر $\dot{\phi}$ ثابت باشد سرعت و شتاب P را به دست آورید.



$$\bar{a}_P = 2b\dot{\phi}^2 \hat{n} \quad \text{و} \quad \bar{v}_P = b\dot{\phi}\hat{t} \quad (1)$$

$$\bar{a}_P = 4b\dot{\phi}^2 \hat{n} \quad \text{و} \quad \bar{v}_P = 2b\dot{\phi}\hat{t} \quad (2)$$

$$\bar{a}_P = b\dot{\phi}^2 \hat{n} \quad \text{و} \quad \bar{v}_P = b\dot{\phi}\hat{t} \quad (3)$$

$$\bar{a}_P = \frac{b\dot{\phi}}{2} \hat{n} \quad \text{و} \quad \bar{v}_P = b\dot{\phi}\hat{t} \quad (4)$$

$$v_t = \rho \dot{\theta} \Rightarrow v_t)_P = b \dot{\theta} \xrightarrow{\theta=2\phi} v_t)_P = 2b\dot{\phi} \Rightarrow \vec{v}_P = 2b\dot{\phi}\hat{t}$$

$\ddot{\theta}=2\ddot{\phi}=0$ ثابت است

$$a_n)_P = \frac{v_t^2}{\rho} = \frac{(2b\dot{\phi})^2}{b} = 4b\dot{\phi}^2 \Rightarrow \vec{a}_P = 4b\dot{\phi}^2 \hat{n} \Rightarrow$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۲ - ۷۳)

نقطه مادی با سرعت ثابت V در امتداد منحنی فضایی $z=\theta$, $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$ حرکت می‌کند. مقدار شتاب نقطه مادی برابر است با:

$$V^2 \cos\theta \quad (۴)$$

صفر

$$V^2 \quad (۲)$$

$$\frac{V^2}{2} \quad (۱)$$

از آنجایی که $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد لذا مسیر حرکت نقطه مادی یک منحنی مارپیچ بر روی سطح استوانه‌ای به شعاع واحد می‌باشد.

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -\dot{\theta} \sin\theta \\ v_y = \dot{y} = \dot{\theta} \cos\theta \Rightarrow V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{2} \dot{\theta} = \text{constant} \\ v_z = \dot{z} = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{constant} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -\dot{\theta}^2 \cos\theta \\ a_y = \ddot{y} = -\dot{\theta}^2 \sin\theta \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \dot{\theta}^2 = \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{V^2}{2} \\ a_z = \ddot{z} = \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۷)

مشتق زمانی بردار یکه (واحد) $\frac{d\hat{R}}{dt} = \dot{\hat{R}}$ در مختصات کروی (R, θ, φ) مساوی است با:

$$(\dot{\theta} \sin\varphi)\hat{\phi} - (\dot{\theta} \cos\varphi)\hat{R} \quad (۲)$$

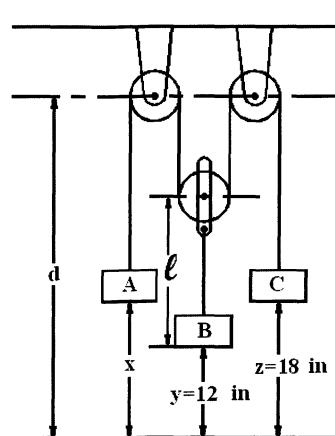
$$(\dot{\theta} \sin\varphi)\hat{\theta} - (\dot{\varphi} \cos\theta)\hat{\phi} \quad (۴)$$

$$-(\dot{\theta} \sin\varphi)\hat{\phi} - (\dot{\theta} \cos\varphi)\hat{R} \quad (۳)$$

با توجه به جدول ارایه شده در بخش قبل جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۱ - ۷۲)

با دانستن این که بلوک‌های B, C یک ثانیه بعد از حرکت از حالت سکون پشت سرهم به زمین می‌خورند، شتاب A را به دست آورید.



$$3.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۲)$$

$$7 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۱)$$

$$13.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۴)$$

$$10.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۳)$$

۱۳ | دینامیک ذرات | آزاد پارسه آموزش عالی آزاد پارسه | مؤسسه

$$y = \frac{1}{2} a_B t^2 \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} a_B (1)^2 \Rightarrow a_B = 24 \left[\frac{\text{in}}{\text{s}^2} \right] = \ddot{y}$$

$$z = \frac{1}{2} a_C t^2 \Rightarrow 18 = \frac{1}{2} a_C (1)^2 \Rightarrow a_C = 36 \left[\frac{\text{in}}{\text{s}^2} \right] = \ddot{z}$$

$$\text{طول ریسمان} = (d - x) + 2(d - y - \ell) + (d - z) + \text{constant}$$

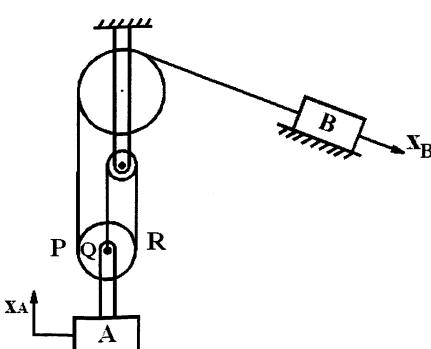
با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} = 0 \Rightarrow v_A + 2v_B + v_C = 0 \\ \ddot{x} + 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0 \Rightarrow a_A + 2a_B + a_C = 0 \Rightarrow a_A = -2 \times 24 - 36 = -84 \left[\frac{\text{in}}{\text{s}^2} \right] = -7 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right] \end{cases}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۶۷-۶۸)

در سیستم داده شده در شکل مقابل رابطه سرعت وزنه A (v_A به طرف بالا) و وزنه B (v_B به طرف پایین) عبارت است از:



$$v_B = 3v_A \quad (2)$$

$$v_B = 2v_A \quad (1)$$

$$v_B = \frac{4}{3}v_A \quad (4)$$

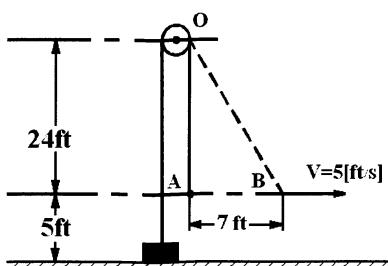
$$v_B = 2v_A \quad (3)$$

هنگامی که وزنه A به اندازه x_A بالا می‌رود نقاط P, Q, R به اندازه x_A بالا می‌روند و به نقاط R' , Q' , P' تبدیل می‌شوند، به طوری که $PP' = QQ' = RR' = x_A$ در اثر این عمل به اندازه $3x_A$ از طول ریسمان آزاد می‌شود و لذا وزنه B به اندازه $x_B = 3x_A$ پایین می‌آید بنابراین داریم:

$$x_B = 3x_A \Rightarrow \dot{x}_B = 3\dot{x}_A \Rightarrow v_B = 3v_A$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۶۹ - ۷۰)



وزنهای به انتهای طنابی به طول [53 ft] متصل شده و انتهای دیگر آن به وسیله شخصی در ارتفاع [5 ft] از سطح زمین نگهداری شده است. اگر شخص با سرعت ثابت [5 ft/s] شروع به حرکت کند، هنگامی که او به اندازه [7 ft] مستقیماً از زیر قرقره دور شده است. سرعت بالا رفتن وزنه تقریباً برابر است با:

$$3.6 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] \quad (4)$$

$$2.5 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

$$1.4 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] \quad (5)$$

$$1 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] \quad (1)$$

$$AB=x, OB=s$$

اگر فرض کنیم شخص مسافت x را طی کرده باشد داریم:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Rightarrow s^2 = 24^2 + x^2 \Rightarrow 2ss \Rightarrow = 2\dot{x}x \Rightarrow \overset{*}{v}s = vx = 5x \Rightarrow \overset{*}{v} = \frac{5x}{s} = \frac{5x}{\sqrt{24^2 + x^2}}$$

که در آن $\overset{*}{v}$ سرعت افزایش طول OB (s) و یا سرعت بالا رفتن وزنه می‌باشد، لذا داریم:

$$\overset{*}{v} \Big|_{x=7} = \frac{5 \times 7}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] = 1.4 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۶۸ - ۷۶)

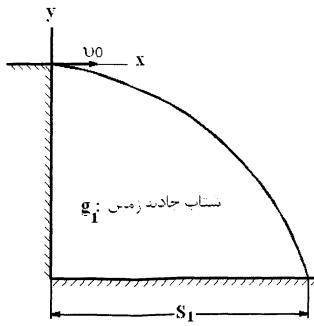
ذره‌ای مادی به جرم m از نقطه‌ای مرتفع نسبت به سطح زمین پرتاب می‌شود (به طور افقی) فاصله افقی طی شده توسط این ذره s_1 اندازه‌گیری می‌شود. اگر شتاب ثقل کره ماه $\frac{1}{6}$ شتاب ثقل کره زمین فرض شود و این ذره از نقطه‌ای مشابه در سطح ماه به طور افقی با سرعت برابر پرتاب شود فاصله افقی s_2 طی شده با s_1 چه رابطه‌ای دارد؟

(۴) هیچ کدام

$$s_2 = \frac{s_1}{6} \quad (۳)$$

$$s_2 = \sqrt{6} s_1 \quad (۲)$$

$$s_2 = 6s_1 \quad (۱)$$



مدت زمان لازم برای رسیدن به سطح زمین:

$$y = \frac{1}{2} g_1 t^2 \Rightarrow -h = \frac{-1}{2} g_1 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g_1}}$$

$$s_1 = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g_1}}$$

به طور مشابه داریم:

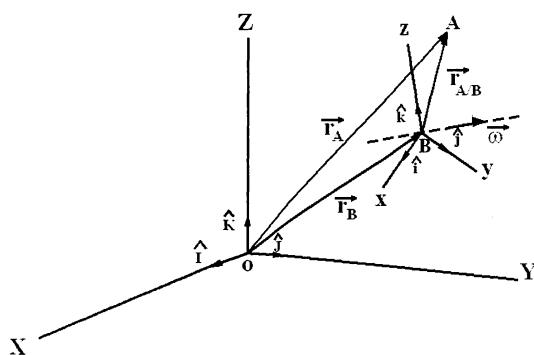
$$s_2 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g_2}}$$

$$g_2 = \frac{g_1}{6} \quad \text{که در آن } g_2 \text{ شتاب جاذبه در کره ماه می‌باشد و}$$

$$\frac{s_2}{s_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt{6} \Rightarrow s_2 = \sqrt{6} s_1$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

رابطه سرعت‌ها و شتاب‌های نسبی و دستگاه‌های چرخان:



دستگاه مختصات ثابت OXYZ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید دستگاه مختصات Bxyz به یک جسم صلب متصل شده و حول محور خط چین نشان با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. موقعیت ذره A نسبت به دستگاه مختصات چرخان Bxyz با بردار $\vec{r}_{A/B}$ مشخص می‌شود و نیز موقعیت اش نسبت به دستگاه مختصات ثابت OXYZ با بردار \vec{r}_A تعیین می‌شود. مطابق شکل داریم:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B}$$

۱۵ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | دینامیک ذرات

از طرفی داریم $\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A$ و $\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B$ که \vec{v}_A و \vec{v}_B به ترتیب سرعت‌های مطلق نقاط A و B نسبت به دستگاه ثابت OXYZ هستند.
بردار $\dot{\vec{r}}_{A/B}$ را بانماد $\vec{v}_{A/B}$ نشان می‌دهند و سرعت نسبی نقطه A نسبت به B می‌نامند. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}}$$

فرض کنید که مختصات نقطه A در دستگاه مختصات چرخان (x, y, z) و بردارهای یکه این دستگاه $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ باشند، در این صورت داریم:

$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{A/B} = v_{A/B} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}$$

نکته‌ای که باید بدان توجه داشت این است که چون دستگاه مختصات Bxyz دوران می‌کند لذا بردارهای یکه‌اش با گذشت زمان تغییر جهت می‌دهند و بنابراین نسبت به زمان مشتق دارند که این مشتقات عبارتند از:

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

$$\dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

با جای‌گذاری روابط بالا در رابطه قبلی داریم:

$$\vec{v}_{A/B} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x(\vec{\omega} \times \hat{i}) + y(\vec{\omega} \times \hat{j}) + z(\vec{\omega} \times \hat{k}) = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{A/B}$$

که در آن $\vec{v}_{Rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ می‌باشد و در مفهوم بردار سرعتی است که با ثابت فرض کردن دستگاه چرخان و تصور حرکت ذره‌ی A نسبت به B بهدست می‌آید. بنابراین سرعت نسبی ذره A نسبت به دستگاه چرخان دارای دو ترم است. یک ترم (\vec{v}_{Rel}) ناشی از حرکت ذره A نسبت به دستگاه چرخان ثابت فرض شده می‌باشد و ترم دیگر آن $(\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$ ناشی از دوران دستگاه چرخان نسبت به دستگاه ثابت می‌باشد. با مشتق‌گیری از رابطه سرعت‌های نسبی داریم:

$$\boxed{\dot{\vec{v}}_A = \dot{\vec{v}}_B + \dot{\vec{v}}_{A/B} \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{a}}_A = \ddot{\vec{a}}_B + \ddot{\vec{a}}_{A/B}}}$$

که در رابطه بالا $\ddot{\vec{a}}_{A/B} = \dot{\vec{v}}_{A/B}$ شتاب نسبی نقطه A نسبت به B نامیده می‌شود.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A/B} &= \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} \Rightarrow \ddot{\vec{a}}_{A/B} = \dot{\vec{v}}_{A/B} = \dot{\vec{v}}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{A/B} \\ &= \dot{\vec{v}}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به تعریف \vec{v}_{Rel} و مشتقات بردارهای یکه دستگاه چرخان نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Rel} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{v}}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} + \dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}} + \dot{z}\dot{\hat{k}} \\ &= \ddot{\vec{a}}_{Rel} + \dot{x}(\vec{\omega} \times \hat{i}) + \dot{y}(\vec{\omega} \times \hat{j}) + \dot{z}(\vec{\omega} \times \hat{k}) = \ddot{\vec{a}}_{Rel} + \vec{\omega} \times (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) = \ddot{\vec{a}}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \end{aligned}$$

که در آن $\ddot{\vec{a}}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$ می‌باشد و در مفهوم بردار شتابی است که با ثابت فرض کردن دستگاه چرخان و تصور حرکت ذره A نسبت به B بهدست می‌آید. با جای‌گذاری رابطه بالا در رابطه مربوط به $\ddot{\vec{a}}_{A/B}$ نتیجه می‌شود.

$$\ddot{\vec{a}}_{A/B} = \ddot{\vec{a}}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

که در رابطه بالا ترم شتاب $\ddot{\vec{a}}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$ (Coriolis) نامیده می‌شود و راجع به مفهو، آن در قسمت‌های بعدی درس توضیح داده خواهد شد.

جمع‌بندی:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

،

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

،

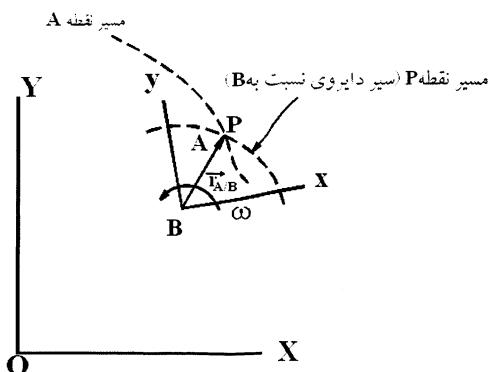
$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v}_{Rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

مفهوم شتاب کریولیس:



برای نشان دادن مفهوم مولفه شتاب کریولیس حرکت دو بعدی (صفحه‌ای) در دستگاه مختصات ثابت OXY و چرخان Bxy نسبت به یکدیگر را در نظر می‌گیریم. دو نقطه منطبق بر هم P و A را در لحظه نشان داده شده در نظر می‌گیریم که مسیر نقطه P نسبت به B یک مسیر دایروی به شعاع r_A/B بوده و مسیر نقطه A یک مسیر دلخواه می‌باشد. در دستگاه قائم مماسی نقطه P نسبت به B دارای دو مولفه شتاب نرمال و مماس می‌باشد که عبارتند از: $\vec{a}_{P/B}^t$ و $\vec{a}_{P/B}^n$

$$|\vec{a}_{P/B}^n| = \frac{(r_{A/B} \omega)^2}{r_{A/B}} = r_{A/B} \omega^2 = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})| \quad \text{و} \quad \omega = \omega \hat{k}, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega} \hat{k}$$

$$|\vec{a}_{P/B}^t| = \frac{d}{dt}(r_{A/B} \omega) = r_{A/B} \dot{\omega} = |\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}|$$

جهت بردار $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}$ عمود بر AB و در جهت ω و هم جهت $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}$ می‌باشد. جهت بردار $\vec{a}_{P/B}^t$ از نقطه A به سمت B و یا در جهت $\vec{a}_{P/B}^n$ می‌باشد. بنابراین اندازه‌ها و جهت بردار $\vec{a}_{P/B}^n$ و $\vec{a}_{P/B}^t$ به ترتیب با اندازه‌ها و جهت بردارهای $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}$ یکسان می‌باشند.

$$\vec{a}_{P/B}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

و لذا نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}_{P/B}^t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}$$

با توجه به رابطه شتاب‌های نسبی داریم:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Rel} + \vec{a}_{P/B}^t + \vec{a}_{P/B}^n + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Rel} + \vec{a}_{P/B} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_{A/P} = \vec{a}_A - \vec{a}_P = \vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

$$\vec{a}_{A/P} = \vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} - \vec{a}_{Rel} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} = \vec{a}_C$$

دستگاه غیر چرخان دستگاه چرخان

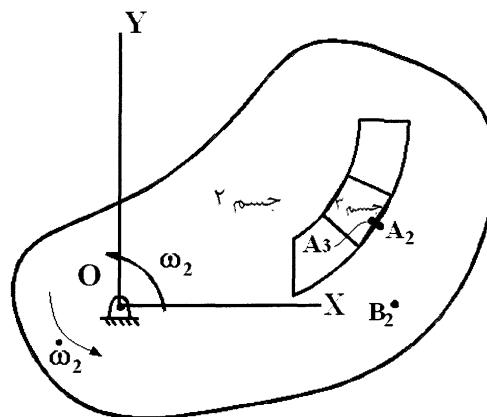
$$\Rightarrow \vec{a}_{A/P} = \vec{a}_{A/P} \quad \text{دستگاه چرخان} \quad + \vec{a}_C$$

۱۷ | دینامیک ذرات | آزاد پارسه | اعلیٰ آموزش مهندسی

در حقیقت شتاب کریولیس اختلاف شتاب نسبی دو نقطه A و P نسبت به یکدیگر است (که نقطه P در فاصله ثابت نسبت به مبدأ مختصات چرخان می‌باشد ولی نقطه A فاصله‌اش نسبت به مبدأ مختصات چرخان متغیر می‌باشد) هنگامی که این شتاب نسبی از دستگاه چرخان و غیرچرخان اندازه‌گیری می‌شود.

برای این که چرخش دستگاه معنا داشته باشد دستگاه Bxy به یک جسم صلب متصل می‌شود و چون نقطه P در فاصله ثابت نسبت به B قرار دارد، گویی این نقطه نیز بر جسم صلب مذکور واقع بوده و با دستگاه دوران می‌کند. حال اگر نقطه دیگری مانند A که بر این جسم صلب واقع نیست، در نظر گرفته شود بین شتاب نسبی این نقطه نسبت به نقطه P برای حالتی که جسم صلب موردنظر چرخان یا غیر چرخان باشد، تفاوت وجود دارد که این اختلاف در مفهوم مولفه شتاب کریولیس می‌باشد. برای روشن شدن موضوع یک مثال مربوط به یک مکانیزم صفحه‌ای را مطرح می‌کنیم.

نخست دو نقطه A_2 و B_2 را واقع بر جسم ۲ در نظر می‌گیریم و دستگاه مختصات $y_2x_2A_2$ را بر آن متصل می‌کنیم. این دستگاه با سرعت زاویه‌ای ω_2 حول محور Z خواهد چرخید.



$$\ddot{a}_{B_2} = \ddot{a}_{A_2} + \ddot{a}_{\text{Rel}} + \dot{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2} + \ddot{\omega}_2 \times (\dot{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2}) + 2 \ddot{\omega}_2 \times \vec{v}_{\text{Rel}}$$

چون دو نقطه A_2 و B_2 روی یک جسم صلب قرار دارند سرعت و شتاب نقطه B_2 نسبت به A_2 وقتی دستگاه A_2xy ثابت فرض شود صفر خواهد بود و لذا داریم $\ddot{a}_{\text{Rel}} = \vec{v}_{\text{Rel}} = \vec{0}$ و لذا رابطه بالا به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\ddot{a}_{B_2} = \ddot{a}_{A_2} + \dot{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2} + \ddot{\omega}_2 \times (\dot{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2}) \Rightarrow \boxed{\ddot{a}_{B_2} = \ddot{a}_{A_2} + \ddot{a}_{B_2/A_2}^t + \ddot{a}_{B_2/A_2}^n}$$

رابطه فوق رابطه آشنایی است که در درس دینامیک ماشین نیز مکرراً به کار می‌رود. همان‌طور که مشاهده کردیم دو نقطه A_2 و B_2 روی یک جسم صلب قرار داشتند به هم دور و نزدیک نمی‌شوند لذا در راستای خط واصل بین این دو نقطه سرعت نسبی ندارد و بنابراین شتاب کریولیس صفر می‌باشد (شتاب کریولیس از دوران سرعت نسبی این دو نقطه در راستای خط واصل بین این دو نقطه به دست می‌آید).

حال دو نقطه A_3 و A_2 را در نظر می‌گیریم که نقطه A_3 بر جسم صلب ۳ که یک لغزنده در داخل شیار جسم ۲ می‌باشد و داریم:

$$r_{A_3/A_2} = 0$$

$$\ddot{a}_{A_3} = \ddot{a}_{A_2} + \ddot{a}_{\text{Rel}} + \dot{\omega}_2 \times \vec{r}_{A_3/A_2} + \ddot{\omega}_2 \times (\dot{\omega}_2 \times \vec{r}_{A_3/A_2}) + 2 \ddot{\omega}_2 \times \vec{v}_{\text{Rel}} \Rightarrow \ddot{a}_{A_3} = \ddot{a}_{A_2} + \ddot{a}_{\text{Rel}} + 2 \ddot{\omega}_2 \times \vec{v}_{\text{Rel}}$$

اگر دستگاه A_2xy را ثابت فرض کنیم و سرعت و شتاب نقطه A_3 را نسبت به این دستگاه بسنجیم \vec{v}_{Rel} و \ddot{a}_{Rel} به دست می‌آیند که $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{A_3/A_2}$ بردار سرعتی است که مماس بر مسیر شیار منحنی شکل می‌باشد و $\ddot{a}_{\text{Rel}} = \ddot{a}_{A_3/A_2}$ بردار شتابی است که

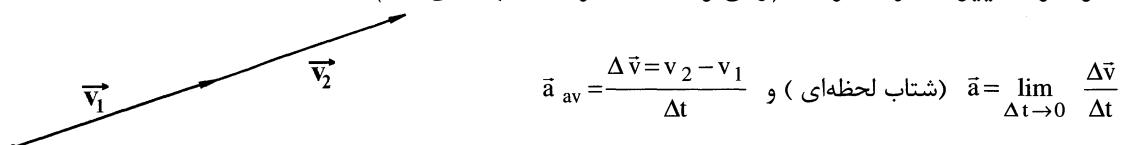
دارای دو مولفه مماس و نرمال \ddot{a}_{A_3/A_2}^t و \ddot{a}_{A_3/A_2}^n می‌باشد از آنجایی که مسیر حرکت نقطه A_3 از شکل شیار منحنی شکل تبعیت می‌کند لذا \ddot{a}_{A_3/A_2}^t مماس بر شیار و \ddot{a}_{A_3/A_2}^n هم عمود بر شیار خواهد بود.

ترم $2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{Re1}$ را نیز با \ddot{a}_{A_3/A_2}^c نمایش می‌دهیم و بدین ترتیب رابطه آشنایی که در درس دینامیک ماشین همواره به کار می‌رود نتیجه می‌شود.

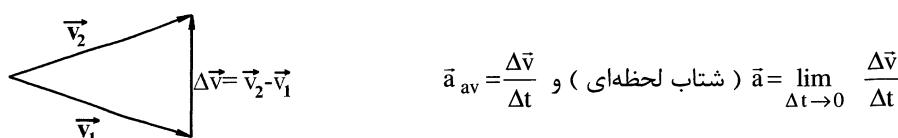
$$\ddot{a}_{A_3} = \ddot{a}_{A_2} + \ddot{a}_{A_3/A_2}^n + \ddot{a}_{A_3/A_2}^t + \ddot{a}_{A_3/A_2}^c$$

دو نقطه A_3 و A_2 در راستای شیار دارای سرعت نسبی \bar{v}_{A_3/A_2} هستند چرا که این دو نقطه نسبت به هم دور و نزدیک می‌شوند. از دوران این بردار سرعت نسبی ترم شتابی به دست می‌آید، که شتاب کریولیس نامیده می‌شود. سوالی که اینجا مطرح است این است که چگونه دوران سرعت نسبی ایجاد شتاب می‌نماید. برای بررسی این موضوع روش‌های به دست آمدن شتاب را بررسی می‌کنیم.

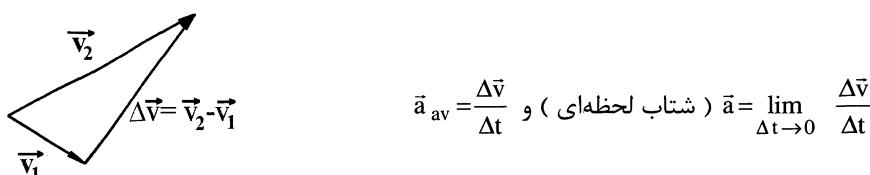
الف) شتاب در اثر تغییر اندازه سرعت (ولی راستای سرعت ثابت می‌ماند):



ب) شتاب در اثر تغییر راستای سرعت (ولی اندازه سرعت ثابت می‌ماند):



ج) شتاب در اثر تغییر اندازه و راستای سرعت:

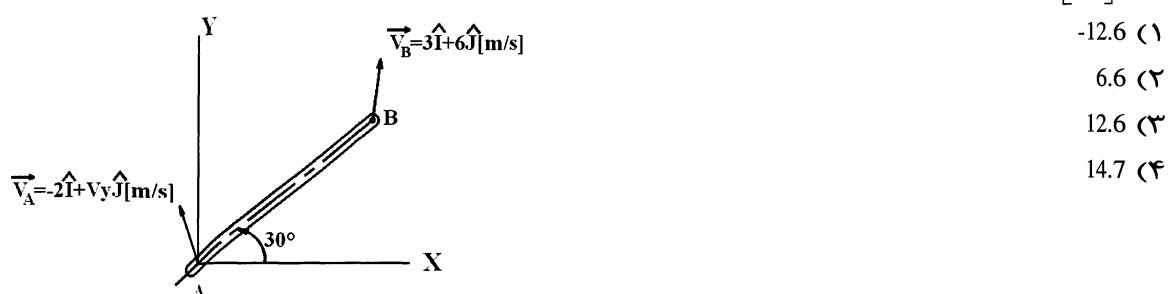


بنابراین با توجه به موارد ذکر شده در می‌باییم که در اثر تغییر اندازه \bar{v}_{A_3/A_2} و دوران $\Delta \bar{v}_{A_3/A_2}$ بردار \ddot{a}_{A_3/A_2} به وجود می‌آید، که ترم شتابی به نام شتاب کریولیس به وجود می‌آورد.

تست سال (۷۷ - ۷۸)

میله AB روی سطحی افقی در حال حرکت است. سرعت نقاط A و B در لحظه t نشان داده شده است. مولفه سرعت v_y برای نقطه

A چند $\left[\frac{m}{s} \right]$ است؟



-12.6 (۱)

6.6 (۲)

12.6 (۳)

14.7 (۴)

۱۹ | دینامیک ذرات

روش اول: با فرض $AB = \ell$ داریم:

$$\vec{r}_{B/A} = (\ell \cos 30) \hat{i} + (\ell \sin 30) \hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j}, \quad \vec{\theta} = \omega \hat{k}$$

چون فاصله نقاط A و B ثابت است، داریم: $\vec{v}_{\text{Rel}} = \vec{0}$ و در نتیجه:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{\text{Rel}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$3\hat{i} + 6\hat{j} = -2\hat{i} + v_y \hat{j} + \omega \hat{k} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ell \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j} \right) = -2\hat{i} + v_y \hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \omega \hat{j} - \frac{\ell}{2} \omega \hat{i}$$

$$= \left(-2 - \frac{\ell}{2} \omega \right) \hat{i} + \left(v_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \omega \right) \hat{j} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -2 - \frac{\ell}{2} \omega \Rightarrow \ell \omega = -10 \\ v_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \omega = 6 \Rightarrow v_y = 6 + 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6 + 5\sqrt{3} \approx 14.7 \left[\frac{m}{s} \right] \end{cases}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

روش دوم:

$$v_A)_{AB} = \vec{v}_A \cdot \hat{\lambda}_{AB} = (-2\hat{i} + v_y \hat{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} \right) = -\sqrt{3} + \frac{v_y}{2}$$

$$v_B)_{AB} = \vec{v}_B \cdot \hat{\lambda}_{AB} = (3\hat{i} + 6\hat{j}) \cdot \left(\frac{3}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3$$

که روابط بالا همان برداریکه در راستای AB می‌باشد. دو مولفه $v_B)_{AB}$ و $v_A)_{AB}$ می‌باشند، چرا

که در غیر این صورت میله AB کشش خواهد آمد و یا فشرده خواهد شد که این فرض خلاف صلب بودن میله AB است پس داریم:

$$v_A)_{AB} = v_B)_{AB} \Rightarrow -\sqrt{3} + \frac{v_y}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \Rightarrow v_y = 6 + 5\sqrt{3} \approx 14.7 \left[\frac{m}{s} \right]$$

اگر مولفه‌های سرعت \vec{v}_A و \vec{v}_B را در راستای عمود بر AB به ترتیب $v_A)_{AB}^\perp$ و $v_B)_{AB}^\perp$ بنامیم داریم:

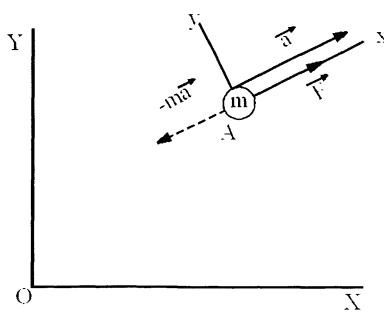
$$\omega_{AB} = \frac{\left| v_B)_{AB}^\perp - v_A)_{AB}^\perp \right|}{\ell} \quad (\text{سرعت زاویه‌ای میله AB})$$

اگر مولفه‌های شتاب \vec{a}_A و \vec{a}_B در راستای عمود بر AB نیز به ترتیب $a_B)_{AB}^\perp$ و $a_A)_{AB}^\perp$ باشند، داریم:

$$\alpha_{AB} = \frac{\left| a_B)_{AB}^\perp - a_A)_{AB}^\perp \right|}{\ell} \quad (\text{شتاب زاویه‌ای میله AB})$$

قانون دوم نیوتون و اصل دالamber:

مطابق قانون دوم نیوتون داریم: $\vec{F} = m \vec{a}$



به عبارت دیگر اگر نیروی \bar{F} به ذرهای به جرم m وارد شود، ذره در جهت نیرو شتابی می‌گیرید که برابر است با $\frac{\bar{F}}{m}$.

حال اگر در دستگاه مختصات Axy متصل به ذره قرار بگیریم از دید ناظر واقع در این دستگاه ذره ساکن می‌باشد، لذا می‌بایستی جمع نیروهای واردہ بر این ذره صفر شود دالamber برای توجیه این تعادل نیروها، نیروی اینرسی $\bar{m}\ddot{a}$ را در جهت عکس \bar{F} به ذره وارد نمود (در شکل با خطچین نشان داده شده است). چون ذره در حال تعادل است جمع نیروها در جهت محور x صفر است. بنابراین داریم:

$$\bar{F} - \bar{m}\ddot{a} = 0 \Rightarrow \bar{F} = \bar{m}\ddot{a}$$

که رابطه فوق با قانون دوم نیوتن سازگار است:

بنابراین مطابق اصل دالamber اگر نیروی اینرسی $\bar{m}\ddot{a}$ را در جهت عکس به یک ذره در حال حرکت اعمال نماییم مساله دینامیک به یک مساله استاتیکی تبدیل شده و جمع نیروها وارد بر ذره صفر خواهد بود. این تعادل ساختگی را تعادل شبه استاتیکی می‌نامند.

قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = m a_y \\ \sum F_z = m a_z \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\begin{cases} \sum F_r = m a_r = m(r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = m a_\theta = m(2r\dot{\theta}\dot{\phi} + r\ddot{\theta}) \\ \sum F_z = m a_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

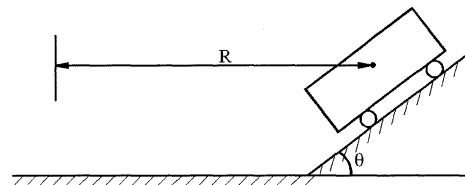
قانون دوم نیوتن در دستگاه قائم و مماسی عبارت است از:

$$\begin{cases} \sum F_n = m a_n = m \frac{v_t^2}{\rho} \\ \sum F_t = m a_t = m v_t \dot{\phi} \end{cases}$$

مثال‌هایی از قانون دوم نیوتن و اصل دالamber و قانون بقای انرژی:

تست سال (۷۵ - ۷۶)

یک اتومبیل وارد پیچی با شعاع R می‌شود، جاده دارای شیب θ می‌باشد. (مطابق شکل) ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده μ است. مینیمم سرعت اتومبیل برای این‌که به طور جانبی به پایین سرخورد چقدر است؟



$$\left[\frac{g R (\cos \theta - \mu \sin \theta)}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left[\frac{g R (\sin \theta - \mu \cos \theta)}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left[\frac{g R (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left[\frac{g R (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

۲۱ | دینامیک ذرات | آزاد پارسه | آموزش عالی آزاد پارسه | مؤسسه

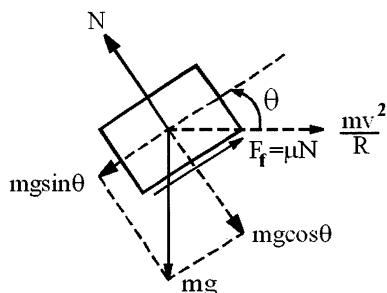
مساله را به دو حالت زیر تعمیم می‌دهیم:

الف) مینیمم سرعت اتومبیل برای این که به طور جانبی به پایین سرنخورد چقدر است؟

ب) ماکزیمم سرعت اتومبیل برای این که به طور جانبی به بالا سرنخورد چقدر است؟

حل مساله: الف) در این حالت جسم تمایل به پایین رفتن دارد. لذا جهت نیروی اصطکاک $F_f = \mu N$ به سمت بالا می‌باشد. دیگر آزاد نیروهای وارد بر جرم m به صورت زیر می‌باشد.

طبق اصل دالamber نیروی $\frac{mv^2}{R}$ در جهت عکس به جرم وارد شده و تعادل شبه استاتیکی ایجاد شده است.



$$\text{جمع نیروها در راستای موازی سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow \mu N - mg \sin \theta + \frac{mv^2}{R} \cos \theta = 0$$

$$\text{جمع نیروها در راستای عمود بر سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow N - mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R} \sin \theta = 0 \Rightarrow N = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right)$$

$$\Rightarrow \mu m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right) - mg \sin \theta + \frac{mv^2}{R} \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} (\mu \sin \theta + \cos \theta) = g (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$\Rightarrow v = \boxed{v_{\min} = \sqrt{\frac{g R (\sin \theta - \mu \cos \theta)}{\mu \sin \theta + \cos \theta}}}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

حل مساله: ب) در این حالت چون جسم تمایل به بالا رفتن دارد جهت نیروی اصطکاک F_f به سمت پایین می‌باشد.

$$\text{جمع نیروها در راستای موازی سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow -\mu N - mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R} \cos \theta = 0$$

$$\text{جمع نیروها در راستای عمود بر سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow N - mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R} \sin \theta = 0 \Rightarrow N = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right)$$

$$\Rightarrow -\mu m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right) - mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R} \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} (\cos \theta - \mu \sin \theta) = g (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$\Rightarrow v = \boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{g R (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}}$$

مقایسه رابطه v_{\max} با v_{\min} نشان می‌دهد که در رابطه v_{\max} مخرج کسر کوچکتر و صورت کسر بزرگ‌تر از v_{\min} می‌باشد، لذا $v_{\max} > v_{\min}$ یعنی نامگذاری v_{\max} و v_{\min} مناسب صورت گرفته است. اگر سرعت اتومبیل $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ اتومبیل در پیچ از جاده خارج نمی‌شود.

فصل دوم

کار و انرژی

فرض کنیم ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی \vec{F} روی منحنی (c) حرکت می‌کند

($d\vec{r}$) کار انجام شده توسط نیروی \vec{F} در جایه‌جایی ناچیز $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

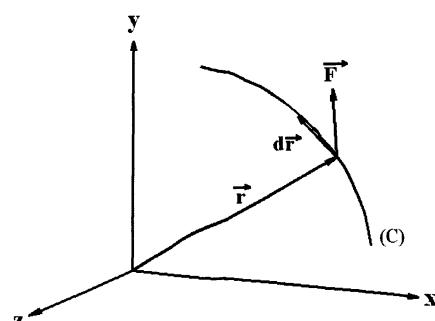
$$W = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

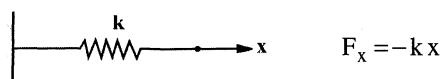
$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$\Rightarrow W = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

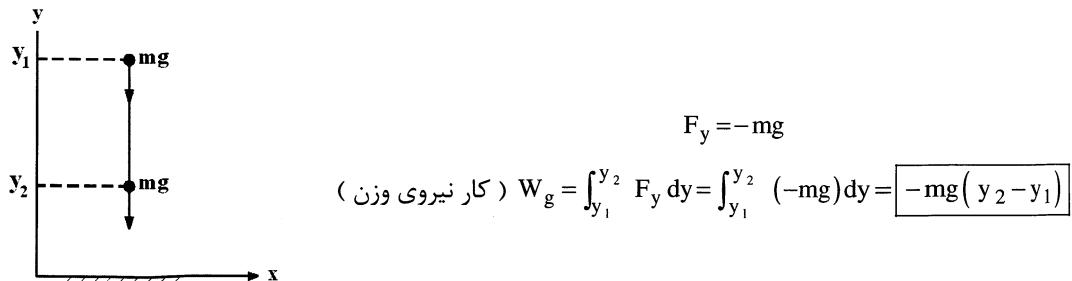


محاسبه کار نیروی فنر:

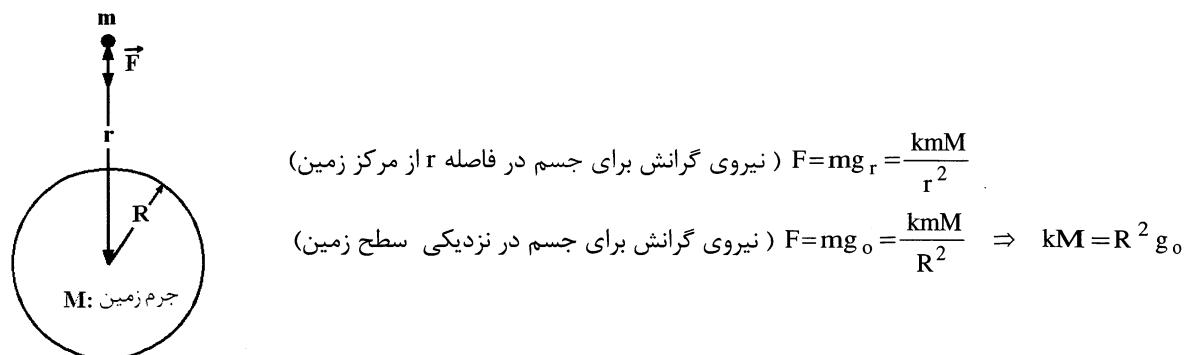


$$W_s = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \boxed{\left(-\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right)}$$

محاسبه کار نیروی وزن:



محاسبه کار نیروی گرانش:



در روابط بالا g_r , g_o به ترتیب شتاب جاذبه در نزدیکی سطح زمین و در فاصله r از مرکز زمین می‌باشد.

$$\Rightarrow g_r = \frac{kM}{r^2} = \frac{R^2 g_o}{r^2} = \boxed{g_o \left(\frac{R}{r} \right)^2} \Rightarrow \vec{F} = mg_r \hat{r} = mg_o \left(\frac{R}{r} \right)^2 \hat{r}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{mg_o R^2}{r^2} dr = -mg_o R^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \boxed{\left[\left(\frac{-mg_o R^2}{r_2} \right) - \left(\frac{mg_o R^2}{r_1} \right) \right]}$$

اگر کار نیروی \vec{F} در جابه‌جایی ناچیز $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ به صورت منفی دیفرانسیل کامل یک تابع اسکالر V باشد در این صورت کار انجام شده توسط نیروی \vec{F} به مسیر حرکت ذره‌ای که تحت تاثیر نیروی \vec{F} می‌باشد بستگی ندارد و فقط به مقدار تابع V در نقاط ابتداء و انتهای مسیر بستگی دارد. تابع V را تابع پتانسیل می‌نامند.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dV = - (V_2 - V_1)$$

با مقایسه رابطه بالا با کار نیروهای فنر، وزن و گرانش توابع پتانسیل زیر تعریف می‌شوند.

$$\boxed{V_e = \frac{1}{2} kx^2} \quad (\text{تابع پتانسیل فنر}) \Rightarrow W_s = - (V_e)_2 - V_e)_1$$

$$\boxed{V_g = mg y} \quad (\text{تابع پتانسیل ثقلی}) \Rightarrow W_g = - (V_g)_2 - V_g)_1$$

$$\boxed{V = \frac{mg_o R^2}{r}} \quad (\text{تابع پتانسیل گرانشی}) \Rightarrow W = - (V_2 - V_1)$$

انواع نیروها:

- الف - نیروهای ابقایی یا پایستار (Conservative): نیروهایی هستند که کار آنها به مسیر حرکت بستگی ندارد. مانند نیروی وزن، نیروی فر، نیروی گرانشی
- ب - نیروهای غیرابقایی یا ناپایستار (Non conservative): نیروهایی هستند که کار آنها به مسیر حرکت بستگی دارد، مانند: نیروی اصطکاک

شرط پایستار بودن نیروها:

$$\begin{aligned} F &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ \vec{r} &= x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \Rightarrow \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = \boxed{-\nabla V} \quad (\text{گرایان } V)$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

شرط لازم و کافی برای آن که یک نیرو پایستار باشد آن است که کرل آن نیرو صفر باشد.

نکته: نیروها با مولفه‌های ثابت پایستار هستند.

مثال: نیروی $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} [N]$ به ذره‌ای وارد شده و ذره از موقعیت $(1, 1, 1)$ به موقعیت $(2, 2, 2)$ به مختصات $(2, 2, 2)$ حرکت می‌کند کار نیروی \vec{F} و تابع پتانسیل مربوط به این نیرو را بیابید.

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -2 \Rightarrow V = -2x + f(y, z) \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \Rightarrow f = -2y + h(x) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -1 = \frac{\partial h}{\partial z} \Rightarrow h = -z + c \end{cases} \Rightarrow f = -2y - z + c \Rightarrow V = -2x - 2y - z + c \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = 1 = \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

$$w = -(v_2 - v_1) = -[(-2 \times 2 - 2 \times 2 - 1 + c) - (-2 \times 1 - 2 \times 1 - 1 + c)] = 5[N.m] = 5[J]$$

(کار نیروی غیر پایستار) $W = W_{n.c} + W_c$ کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

قضیه کار و انرژی:

$$w = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \Rightarrow \vec{a} \cdot d\vec{r} = \ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz \Rightarrow w = \int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx + \int_{y_1}^{y_2} m\ddot{y}dy + \int_{z_1}^{z_2} m\ddot{z}dz$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}dx = \dot{x}d\dot{x} \\ \dot{y}dy = \dot{y}d\dot{y} \\ \dot{z}dz = \dot{z}d\dot{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} m\dot{x}d\dot{x} + \int_{\dot{y}_1}^{\dot{y}_2} m\dot{y}d\dot{y} + \int_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2} m\dot{z}d\dot{z} = m \left[\frac{\dot{x}^2}{2} \right]_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} + m \left[\frac{\dot{y}^2}{2} \right]_{\dot{y}_1}^{\dot{y}_2} + m \left[\frac{\dot{z}^2}{2} \right]_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2} \\ = \frac{m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)}{2} = \frac{m v_2^2 - m v_1^2}{2} = \Delta T \Rightarrow [W = \Delta T] \text{ و } T = \frac{1}{2}mv^2$$

قضیه کار و انرژی بیان می‌کند که کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر است با تغییرات انرژی جنبشی.

$$\Rightarrow W = \Delta T = W_c + W_{n.c.} = -\Delta V + W_{n.c.} \Rightarrow W_{n.c.} = \Delta T + \Delta V = \Delta(T + V) = \Delta E$$

$$\Rightarrow [W_{n.c.} = \Delta E] \quad (\text{کار نیروهای غیر پایستار})$$

مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل را انرژی مکانیکی (E) می‌نامند.

قانون بقاع انرژی:

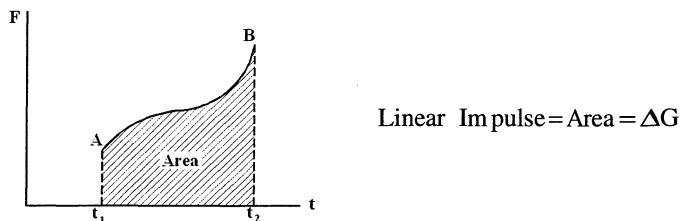
اگر کار نیروهای غیر پایستار صفر باشد، تغییرات انرژی مکانیکی صفر باشد و انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند و به عبارت دیگر انرژی مکانیکی بقا خواهد داشت.

اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{G}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt} \Rightarrow \vec{F} dt = d\vec{G} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \text{ضربه خطی (Linear Impulse)} = \int_1^2 d\vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta \vec{G}$$

$$\text{Linear Impulse} = \text{Area} = \Delta G$$



قانون بقای اندازه حرکت خطی: اگر جمع نیروهای خارجی در یک راستا صفر باشد بقای اندازه حرکت خطی در آن راستا برقرار است و یا مقدار اندازه حرکت خطی در آن راستا ثابت می‌ماند.

$$\vec{F} = \dot{\vec{G}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G} = \text{constant}$$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{v}})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} \rightarrow \vec{M}_o = m \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{H}_o}{dt} = \dot{\vec{H}}_o \Rightarrow \boxed{\vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o}$$

$$^o \text{ (اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه } = \vec{H}_o = \vec{r} \times \vec{G}$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt} \Rightarrow \vec{M}_o dt = d\vec{H}_o \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o dt = \int_1^2 d\vec{H}_o = \vec{H}_o - \vec{H}_o \Big)_1 = \Delta \vec{H}_o \text{ (ضربه زاویه‌ای) (Angular Impulse)}$$

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای: اگر جمع گشتاورهای خارجی وارد به یک ذره حول یک نقطه ثابت صفر باشد تغییرات اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه صفر بوده و یا اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه بقا خواهد داشت.

$$\vec{M}_o = \vec{o} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_o = \vec{H}_o = \text{constant}$$

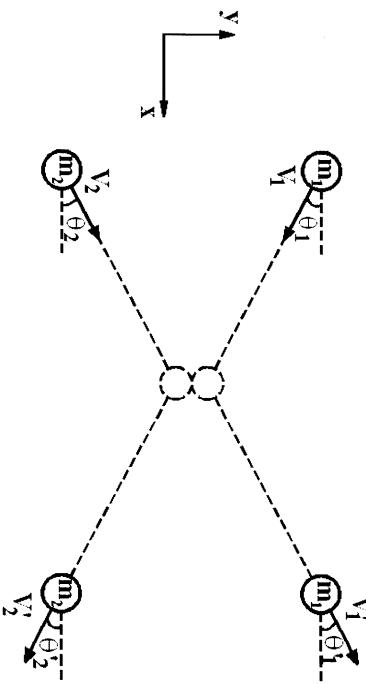
جمع بندی:

$\vec{G} = m \vec{v}$ Linear momentum	$\vec{H}_o = \vec{r} \times \vec{G}$ Angular momentum
$\vec{F} = \dot{\vec{G}}$	$\vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o$
$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{G}$ Linear Impulse	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o dt = \Delta \vec{H}_o$ Angular Impulse

فصل سوم

برخورد ذرات

دو جرم m_1 و m_2 با سرعت‌های v_1 و v_2 مطابق شکل حرکت می‌کند و پس از برخورد با سرعت‌های v'_1 و v'_2 که با محور x زوایای θ_1 و θ_2 می‌سازند از هم دور می‌شوند محور لاشان دهنده راستی عمود بر برخورد می‌باشد. در حالت کلی در برخورد اجرام سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 و زویای آنها با محور x θ_1 و θ_2 معلوم هستند و هدف یافتن بردارهای سرعت‌های بعد از برخورد می‌باشد. لذا مجهولات مساله v'_1 و v'_2 و θ'_1 و θ'_2 هستند.



معادلات در راستای عمود بر ضربه:

برای به دست آوردن این مجهولات مجموعاً چهار معادله تشکیل می‌دهیم که دو معادله از این معادلات در راستای عمود بر ضربه و دو معادله دیگر در راستای ضربه نوشته می‌شود.

جزئی در راستای عمود بر ضربه از نیروی اصطکاک صرف نظر می‌شود نیروی در راستای عمود بر ضربه $F_x = 0$ می‌باشد و لذا ضربه:

خطی در راستای عمود بر ضربه صفر است و بنابراین داریم:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = G_x)_2 - G_x)_1$$

که در آن $G_x)_1$ و $G_x)_2$ به ترتیب اندازه حرکت خطی در راستای محور x ها قبل و بعد از برخورد هستند. رابطه بالا برای تک تک اجرام به صورت زیر نوشته می شود.

$$m_1 v'_1 \cos \theta'_1 - m_1 v_1 \cos \theta_1 = 0 \quad \text{برای جرم اول:}$$

$$m_2 v'_2 \cos \theta'_2 - m_2 v_2 \cos \theta_2 = 0 \quad \text{برای جرم دوم:}$$

و یا داریم:

$$v'_x)_1 = v_x)_1 \quad (1)$$

$$v'_x)_2 = v_x)_2 \quad (2)$$

که در آن $v_x)_2 = v_2 \cos \theta_2$ و $v_x)_1 = v_1 \cos \theta_1$ به ترتیب مولفه های سرعت اولین و دومین جرم در راستای عمود بر ضربه قبل از برخورد و $v'_x)_2 = v'_2 \cos \theta'_2$ و $v'_x)_1 = v'_1 \cos \theta'_1$ به ترتیب مولفه های سرعت اولین و دومین جرم در راستای عمود بر ضربه بعد از برخورد می باشد. به عبارت دیگر در برخورد اجرام مولفه سرعت اجرام در راستای عمود بر ضربه برای تک تک اجرام تغییر نمی کند و قبل و بعد از برخورد ثابت می باشد.

معادلات در راستای ضربه:

در راستای ضربه (محور y) دو جرم نیروی F_y را به یکدیگر وارد می کنند که طبق قانون عمل و عکس العمل نیرویی که جرم دوم به اول وارد می کند با نیروی که جرم اول به دوم وارد می کند برابر و در خلاف جهت می باشد.

$$\int_{t_1}^{t_2} F_y dt = G_y)_2 - G_y)_1 = m_1 v'_1 \sin \theta'_1 - (-m_1 v_1 \sin \theta_1) \quad \text{ضربه در راستای محور } y \text{ برای جرم اول:}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} -F_y dt = G_y)_1 - G_y)_2 = -m_2 v'_2 \sin \theta'_2 - m_2 v_2 \sin \theta_2 \quad \text{ضربه در راستای محور } y \text{ برای جرم دوم:}$$

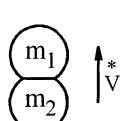
چون مقدار F_y مجهول است می بایستی با جمع دو معادله بالا آن را حذف کنیم، بنابراین داریم:

$$m_1 v'_1 \sin \theta'_1 + m_1 v_1 \sin \theta_1 - m_2 v'_2 \sin \theta'_2 - m_2 v_2 \sin \theta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$[-m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2 = -m_2 v'_2 \sin \theta'_2 + m_1 v'_1 \sin \theta'_1] \quad (3) \quad \text{قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه}$$

در عبارت بالا سمت چپ عبارت مجموع اندازه حرکت های خطی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد و عبارت سمت راست مجموع اندازه حرکت های خطی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد می باشد.

حال می بایستی آخرین معادله که در راستای ضربه نوشته می شود را تشکیل می دهیم تا تمامی مجهولات مساله به دست آیند.



فرض کنیم دو جرم m_1 و m_2 هنگامی که در راستای ضربه به ترتیب با سرعت های $v_1 \sin \theta_1$ و $v_2 \sin \theta_2$ به هم نزدیک شدند به هم مماس می شوند و سپس برای مدت زمان کوتاهی دو جرم دچار تغییر شکل شده و دو جرم آنقدر به هم نزدیک می شوند تا به ماکریم تغییر شکل برسند.

اگر سرعت مجموعه در این وضعیت v^* (که آنرا سرعت در حین تغییر شکل می نامیم) باشد دو جرم پس از این وضعیت دوباره از هم کم کم دور می شوند و نهایتاً از هم جدا می شوند و با سرعت های $v'_1 \sin \theta'_1$ و $v'_2 \sin \theta'_2$ - از هم دور می شوند. مرحله آغاز تماس دو جرم تا ماکریم تغییر شکل اجرام را «مرحله تغییر شکل» و مرحله ماکریم تغییر شکل اجرام تا آغاز جدایش دو جرم را «مرحله بازگشت» می نامیم. ضربی بازگشت برای دو جرم برخورد کننده که به جنس اجرام برخورد کننده بستگی دارد و به کمک آزمایش تعیین می شود را به صورت زیر تعریف می کنیم.

۲۹ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | برخورد ذرات

$$e = \frac{\text{ضریب در مرحله بازگشت}}{\text{ضریب در مرحله تغییر شکل}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F_r dt}{\int_{t_0}^{t_1} F_d dt} = \frac{\text{تغییرات اندازه حرکت خطی در راستای ضریب در مرحله بازگشت}}{\text{تغییرات اندازه حرکت خطی در راستای ضریب در حین تغییر شکل}} \Rightarrow$$

r:restitution (بازگشت)

d:deformation (تغییر شکل)

$$e = \frac{m_1 v'_1 \sin \theta'_1 - m_1 v^*}{m_1 v^* - (-m_1 v_1 \sin \theta_1)} = \frac{v'_1 \sin \theta'_1 - v^*}{v^* + v_1 \sin \theta_1} \quad \text{ضریب بازگشت برای جرم اول:}$$

$$e = \frac{-m_2 v'_2 \sin \theta'_2 - m_2 v^*}{m_2 v^* - m_2 v_2 \sin \theta_2} = \frac{v'_2 \sin \theta'_2 + v^*}{-v^* + v_2 \sin \theta_2} \quad \text{ضریب بازگشت برای جرم دوم:}$$

$$e = \frac{v'_1 \sin \theta'_1 - v^*}{v^* + v_1 \sin \theta_1} = \frac{v'_2 \sin \theta'_2 + v^*}{-v^* + v_2 \sin \theta_2} \Rightarrow e = \frac{(v'_1 \sin \theta'_1 - v^*) + (v'_2 \sin \theta'_2 + v^*)}{(v^* + v_1 \sin \theta_1) + (-v^* + v_2 \sin \theta_2)} = \frac{v'_1 \sin \theta'_1 + v'_2 \sin \theta'_2}{v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2} \Rightarrow$$

$$e = \frac{v'_1 \sin \theta'_1 + v'_2 \sin \theta'_2}{v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2} = \frac{\text{سرعت نسبی دو جرم در راستای ضریب بعد از برخورد}}{\text{سرعت نسبی دو جرم در راستای ضریب قبل از برخورد}} \quad (4)$$

به خاطر داشته باشید که اگر دو جرم به هم نزدیک یا دور شوند سرعت‌های نسبی آن‌ها مجموع اندازه سرعت‌هایشان و اگر هم جهت با هم حرکت کنند سرعت نسبی آن‌ها تفاضل اندازه سرعت بزرگ‌تر منهای اندازه سرعت کوچک‌تر خواهد بود.
گر یکی از اجرام برخورد کننده مثلاً جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، داریم:

$$\begin{cases} v_2 = v'_2 = 0 \\ m_2 \rightarrow \infty \end{cases}$$

در این صورت تنها مجهولات مساله v'_1 و θ'_1 خواهد بود. در این صورت معادله (2) حتماً ارضا می‌شود و معادله (3) بی‌معنی خواهد بود، در این صورت تنها دو معادله زیر را داریم:

$$e = \frac{v'_1 \sin \theta'_1}{v_1 \sin \theta_1}$$

جمع‌بندی:

در مسایل برخورد ذرات در حالت کلی چهار معادله نوشته می‌شود. دو معادله در راستای عمود بر ضریب که این معادله عبارتند از:

(۱) مؤلفه سرعت جرم اول در راستای عمود بر ضریب تغییر نمی‌کند.

(۲) مؤلفه سرعت جرم دوم در راستای عمود بر ضریب تغییر نمی‌کند.

و دو معادله دیگر که در راستای ضریب نوشته می‌شوند عبارتند از:

(۳) قانون بقای اندازه حرکت مجموعه دو جرم برخورد کننده در راستای ضریب (مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعه دو جرم در راستای ضریب قبل از برخورد با مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعه دو جرم در راستای ضریب بعد از برخورد برابر است).

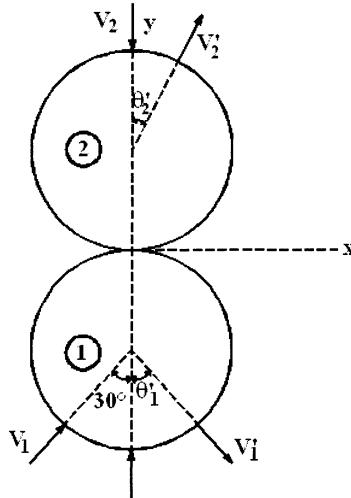
(۴) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت نسبی دو جرم در راستای ضریب بعد از برخورد به سرعت نسبی دو جرم در راستای ضریب قبل از برخورد.

در حالت خاص اگر جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، این چهار معادله به دو معادله زیر کاهش می‌یابد.

(۱) مؤلفه سرعت جرم متحرک در راستای عمود بر ضریب تغییر نمی‌کند.

(۲) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت جرم متحرک در راستای ضریب بعد از برخورد به سرعت جرم متحرک در راستای ضریب قبل از برخورد.

تست سال (۶۷ - ۶۸)



دو گلوله آهنی به جرم مساوی و با سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 طوری برخورد می‌کنند که جهت سرعت v_2 روی خطی که مرکز دو گلوله را به هم وصل می‌کند می‌باشد. اگر برخورد کاملاً پلاستیک نباشد، جهت گلوله 2 بعد از برخورد.

۱) در جهت محور y می‌باشد.

۲) درجهت محور x می‌باشد.

۳) در جهت زاویه 30 درجه با محور y می‌باشد.

۴) مشخص نیست.

- برخورد الاستیک کامل برخوردی است که در آن ضریب بازگشت $e = 1$ می‌باشد.

- برخورد پلاستیک کامل برخوردی است که در آن ضریب بازگشت $e = 0$ می‌باشد (زمانی که سرعت اجرام برخورد کننده بعد از برخورد در جهت برخورد یکسان می‌شود مطرح می‌باشد).

- ضریب بازگشت همواره عددی است بین صفر و یک

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم ② در راستای عمود بر ضربه عبارت است از:

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_2 = 0 & \Rightarrow \text{با توجه به این که برخورد پلاستیک کامل نمی‌باشد لذا می‌توان حدوداً برداشت کرد که این حالت امکان ندارد.} \\ \text{یا} \\ \sin \theta'_2 = 0 & \Rightarrow \text{جهت گلوله ② بعد از برخورد در راستای محور y می‌باشد.} \end{cases}$$

به نظر می‌رسد که جواب گزینه (۱) باشد ولی مساله نیاز به بحث بیشتری دارد. لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $v'_2 = 0$

$$e = \frac{v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2 \cos \theta'_2}{v_1 \cos 30^\circ + v_2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2}{\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2} \quad (I)$$

$$m_1 v_1 \sin 30^\circ = m_1 v_1 \sin \theta'_1$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم ① در راستای عمود بر ضربه

$$\Rightarrow v'_1 \sin \theta'_1 = 0.5 v_1 \quad (II)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه

$$m_1 v_1 \cos 30^\circ - m_2 v_2 = -m_1 v'_1 \cos \theta'_1 + m_2 v'_2 \cos \theta'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - v_2 = -v'_1 \cos \theta'_1 \quad \Rightarrow \quad v'_1 \cos \theta'_1 = v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 \quad (III)$$

$$\theta'_1 = \tan^{-1} \left(\frac{v_1}{2v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1} \right), \quad v'_1 = \sqrt{(0.5 v_1)^2 + \left(v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 \right)^2}$$

از حل معادلات (II) و (III) داریم:

۳۱ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | برخورد ذرات

ولی از معادلات حاکم به هیچ وجه نمی‌توان θ'_2 را مشخص نمود چون θ'_2 حذف شده است. لذا به نظر می‌رسد جواب گزینه (۴) باشد در ضمن با مقایسه معادلات (III) و (I) در می‌باییم که ضریب بازگشت می‌بایستی بر حسب سرعت‌های v_1 و v_2 بیان شود که لزوماً این مقدار نمی‌باشد.

$$b) \theta'_2 = 0$$

به لحاظ فیزیکی به نظر می‌رسد که وقوع حالت (ب) نسبت به (الف) منطقی‌تر است. چرا که جواب‌ها بر حسب ضریب بازگشت خواهد بود.

$$e = \frac{v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2}{v_1 \cos 30^\circ + v_2} \rightarrow \boxed{v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2 = e \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2 \right)} \quad (1)$$

$$\boxed{-v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - v_2} \quad (2)$$

از حل همزمان معادلات (1) و (2) و (II) داریم:

$$\begin{aligned} 2v'_2 &= (e+1) \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + (e-1) v_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (e+1) v_1 + \left(\frac{e-1}{2} \right) v_2 \\ \Rightarrow v'_1 \cos \theta'_1 &= e \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2 \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} (e+1) v_1 - \left(\frac{e-1}{2} \right) v_2 = \sqrt{3} \frac{(e-1)}{4} v_1 + \frac{(e+1)}{2} v_2 \\ \Rightarrow \theta'_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{2v_1}{\sqrt{3}(e-1)v_1 + 2(e+1)v_2} \right), \quad v'_1 = \sqrt{\left(0.5v_1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(e-1)}{4} v_1 + \left(\frac{e+1}{2} \right) v_2 \right)^2} \end{aligned}$$

بنابراین جواب گزینه (1) می‌باشد. جواب‌های به دست آمده برای حالت (ب) به ازای یک مقدار خاص e به جواب‌های حالت (الف) تبدیل می‌شوند.

تست سال (۷۲ - ۷۳)

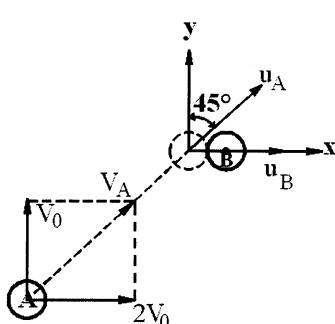
ذره B ساکن و ذره A با سرعت v_A با مولفه‌های داده شده در شکل به آن نزدیک می‌شود. بعد از برخورد سرعت ذره B برابر با $u_B = v_0$ در امتداد محور x و زاویه بردار سرعت ذره A با محور x برابر 45° است. در این برخورد ضریب بازگشت (coefficient of restitution) برابر است با:

$$(1) \text{ صفر}$$

$$(2) \text{ یک}$$

$$(3) 0.5$$

$$(4) 0.75$$

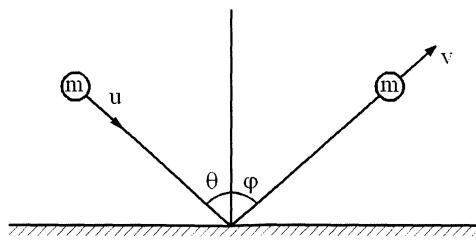


قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم A در راستای عمود بر ضربه: $u_A \cos 45^\circ - v_0 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} u_A = v_0$

$$e = \frac{u_B - u_A \cos 45^\circ}{2v_0 + 0} = \frac{v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} u_A}{2v_0} = 0$$

جواب گزینه (1) می‌باشد.

تیمت سال (۷۴ - ۷۵)



گلوله‌ای مطابق شکل با سرعت u به سطح افقی مسطح و بدون اصطکاکی برخورد می‌کند. اگر زاویه برخورد آن نسبت به عمود بر سطح θ باشد، زاویه انعکاس گلوله یعنی φ بر حسب θ و ضریب بازگشت ϵ چگونه است؟

$$\tan \varphi = 2 \epsilon \tan \theta \quad (2)$$

$$2\theta = \varphi \quad (1)$$

$$\tan \varphi = \epsilon \tan \theta \quad (4)$$

$$\tan \theta = \epsilon \tan \varphi \quad (3)$$

جرم m با سرعت u به سطح نزدیک می‌شود لذا سرعت نسبی در امتداد ضربه قبل از برخورد $u \cos \theta$ می‌باشد.

جرم m با سرعت m از سطح دور می‌شود لذا سرعت نسبی در امتداد ضربه بعد از برخورد $v \cos \varphi$ می‌باشد.

$$\epsilon = \frac{v \cos \varphi}{u \cos \theta} \quad (\text{ضریب بازگشت})$$

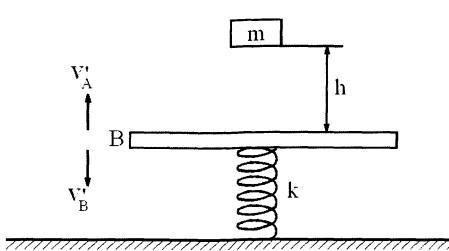
قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای عمود بر ضربه برای جرم m

$$\Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{v}{u} \right) \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \right) = \frac{\tan \theta}{\tan \varphi} \Rightarrow \boxed{\tan \theta = \epsilon \tan \varphi}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

اگر برخورد الاستیک کامل باشد $\epsilon = 1$ می‌باشد که در این حالت $\varphi = \theta$ می‌باشد (در این حالت مسیر حرکت جرم همانند مسیر حرکت نور است که به آینه برخورد می‌کند و زاویه تابش با بازتابش برابر می‌باشد).

تیمت سال (۷۴ - ۷۵)



در شکل زیر وزنه A بر ارتفاع h بر روی صفحه‌ای به جرم $2m$ سقوط می‌کند. ثابت فنر برابر k است. اگر ضریب برخورد e باشد، سرعت صفحه بلافلانله پس از برخورد کدام است؟

$$\sqrt{2gh} ek \quad (2) \qquad \sqrt{2gk} \quad (1)$$

$$\sqrt{2gh} (1+e) k \quad (4) \qquad \frac{1}{3} \sqrt{2gh} (1+e) \quad (3)$$

هنگامی که جرم m ارتفاع h را با سقوط آزاد طی می‌کند سرعتش قبل از برخورد به $\sqrt{2gh}$ می‌رسد. فرض کنید که جرم m پس از برخورد به سمت بالا و صفحه B به سمت پایین حرکت می‌کند (می‌توان فرض نمود که هم جهت هم، حرکت می‌کنند) در این صورت، قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای برخورد برای جرم m و صفحه B عبارت است از:

$$-m\sqrt{2gh} + 2m \times 0 = mv'_A - 2mv'_B \Rightarrow v'_A - 2v'_B = -\sqrt{2gh}$$

$$e = \frac{v'_A + v'_B}{\sqrt{2gh} + 0} \Rightarrow v'_A + v'_B = e\sqrt{2gh}$$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

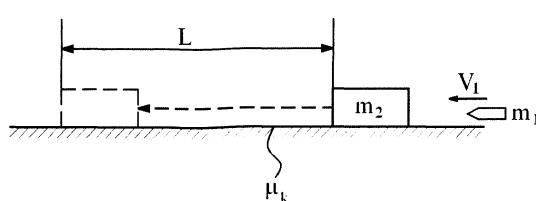
$$v'_B = \frac{(e+1)}{3} \sqrt{2gh}, \quad v'_A = \frac{(2e-1)}{3} \sqrt{2gh}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

۳۳ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | برخورد ذرات

تست سال (۷۴ - ۷۵)

گلوله‌ای با جرم m_1 پس از برخورد به جعبه‌ای با جرم m_2 داخل آن فرو رفته و نسبت به آن ساکن می‌شود. جعبه در اثر برخورد گلوله به حرکت درآمده و بر روی سطح زبر با ضریب اصطکاک μ_k ، L متر به جلو حرکت می‌نماید. سرعت گلوله پیش از برخورد کدام است؟



$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gL\mu_k} \quad (۲)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{gL\mu_k} \quad (۱)$$

$$\frac{m_2}{m_1} \sqrt{gL\mu_k} \quad (۴)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_k \sqrt{gL} \quad (۳)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم عبارت است از:

$$m_1 v_1 + m_2 \times 0 = (m_1 + m_2) v_0 \Rightarrow v_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) v_0$$

مجموعه دو جرم $m_1 + m_2$ با سرعت اولیه v_0 شروع به حرکت کرده و تحت تأثیر نیروی اصطکاک $F_f = -\mu_k (m_1 + m_2) g$ مسافت L را طی می‌کند و نهایتاً متوقف می‌شوند.

$$F_f = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = -\mu_k g$$

$$\Rightarrow 0^2 - v_0^2 = 2aL = 2(-\mu_k g)L \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gL\mu_k} \Rightarrow \boxed{v_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gL\mu_k}}$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۴ - ۷۵)

مطابق شکل وزنهای به وزن $b01b$ که توسط فرنی با ضریب سختی $k=150 \text{ lb/ft}$ به صفحه P متصل است، از حالت سکون و از ارتفاع $h=1 \text{ [ft]}$ رها شده و پس از اصابت به تکیه‌گاه، صفحه P روی تکیه‌گاه ساکن می‌شود. مقدار ماکریم تغییر طول فنر کدام است؟

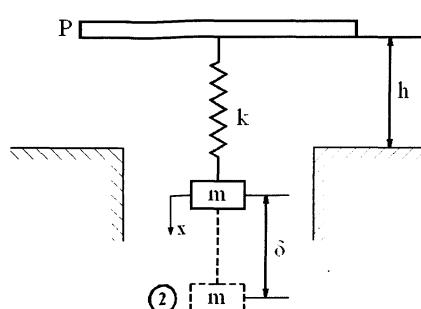
$$1.52 \text{ ft} \quad (۲) \qquad 0.81 \text{ ft} \quad (۱)$$

$$1.38 \text{ ft} \quad (۴) \qquad 2.24 \text{ ft} \quad (۳)$$

روش اول: فرض می‌کنیم که با افزودن جرم m فنر دچار تغییر مکان استاتیکی δ_{st} می‌شود، بنابراین داریم: $mg = k\delta_{st}$ قانون بقای انرژی مکانیکی را بین دو موقعیت ① و ② می‌نویسیم. در موقعیت ① فرض می‌شود که فنر به اندازه δ_{st} کشیده شود و مجموعه جرم m و صفحه P و فنر مسافت h را طی نموده و به سرعت $\sqrt{2gh}$ رسیده‌اند، بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} v_g)_1 = 0 \\ T_1 = \frac{1}{2} m (\sqrt{2gh})^2 = mgh \\ v_e)_1 = \frac{1}{2} k (\delta_{st})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_g)_2 = -mg\delta \\ T_2 = 0 \iff \text{صفر خواهد بود} \\ v_e)_2 = \frac{1}{2} k (\delta + \delta_{st})^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 + k \delta_{st} \delta + \frac{1}{2} k \delta_{st}^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 + mg\delta + \frac{1}{2} k \delta_{st}^2 \end{cases}$$



$$E_1 = T_1 + v_g)_1 + v_e)_1 = mgh + \frac{1}{2}k(\delta_{st})^2 = E_2 = T_2 + v_g)_2 + v_e)_2 = 0 + (-mg\delta) + \frac{1}{2}k\delta^2 + mg\delta + \frac{1}{2}k(\delta_{st})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k\delta^2 = mgh \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 60 \times 1}{150}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.89 \approx 0.81 \text{ ft}$$

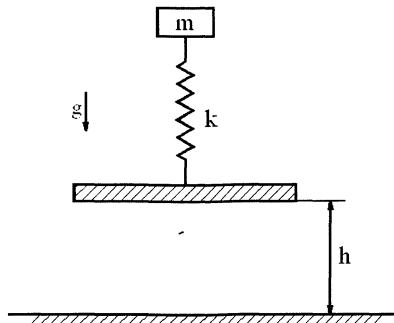
جواب گزینه (۱) می‌باشد.

روش دوم: همانطور که در روش اول مشاهده شد عملأً ترم‌های مربوط به جابه‌جایی استاتیکی حذف شد. چرا که جابه‌جایی استاتیکی در اثر نیروی وزن ایجاد می‌شود و اگر ما انرژی پتانسیل ثقلی که ناشی از نیروی وزن است و جابه‌جایی استاتیکی را در نظر بگیریم این دو اثر همیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین هر زمان جابه‌جایی استاتیکی فر تنهای در اثر نیروی وزن باشد می‌توانیم انرژی پتانسیل ثقلی را در نظر نگیریم بنابراین داریم:

$$\begin{cases} T_1 = mgh \\ v_e)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = mgh$$

$$\begin{cases} T_2 = 0 \\ v_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \end{cases} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad \text{بقای انرژی} \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}k\delta^2 \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

تسنیت سال (۷۸ - ۷۹)



سیستم جرم و فنر نشان داده شده از ارتفاع h رها می‌شود و پس از برخورد، پایه به زمین می‌چسبید و حرکت جرم m باعث فشردن فنر می‌شود. سرعت جرم m در موقعیتی که فنر به اندازه نصف فشردن فنر می‌شود شده

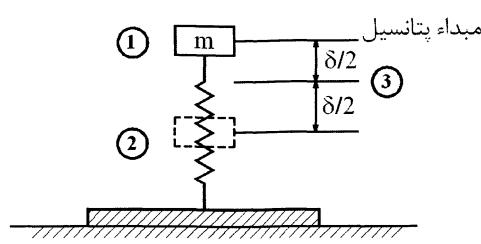
است با فرض $k = \frac{4mg}{h}$ عبارت است از:

$$\sqrt{2gh} \quad (2)$$

$$\sqrt{gh} \quad (1)$$

$$2\sqrt{gh} \quad (4)$$

$$\sqrt{3gh} \quad (3)$$



اگر حداقل فشردن فنر δ فرض شود مطابق مثال قبل از جابه‌جایی استاتیکی δ_{st} صرف‌نظر می‌کنیم و در عوض انرژی پتانسیل ثقلی را هم در نظر نمی‌گیریم.

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 = mgh \\ v_e)_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 = T_1 + v_e)_1 = mgh$$

در نقطه ① داریم

به طور مشابه در نقطه ② داریم:

$$\begin{cases} T_2 = 0 \\ v_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + v_e)_2 = \frac{1}{2}k\delta^2$$

۳۵ | بروخورد ذرات | پارسه آزاد ازد آموزش عالی آزاد

در نقطه ③ نیز انرژی مکانیکی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} T_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 \\ v_e)_3 = \frac{1}{2} k \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 + \frac{1}{8} k \delta^2$$

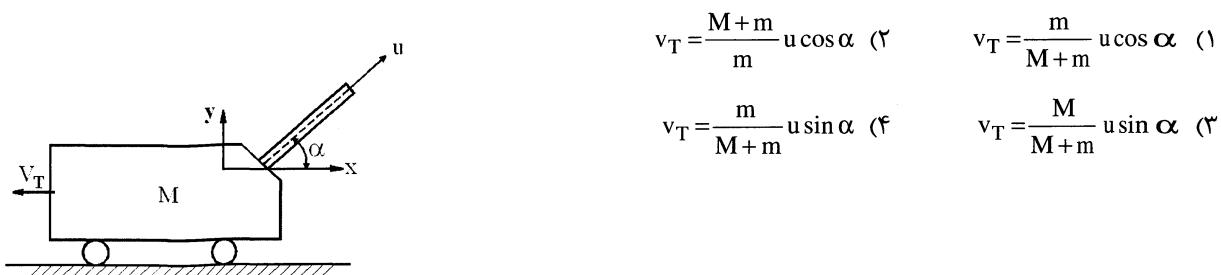
$$\Rightarrow E_1 = E_2 = E_3 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} m v_3^2 + \frac{1}{8} k \delta^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2mgh}{\frac{4mg}{h}}} = \sqrt{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_3^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) k \delta^2 \Rightarrow v_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k \delta^2}{m}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{4mg \times h^2}{h \cdot m}} = \sqrt{\frac{3gh}{2}}$$

جواب هیچ کدام از گزینه‌ها نمی‌باشد. اگر فرض کنیم که فنر در موقع رها شدن فشرده نشده باشد، یعنی δ_{st} وجود ندارد و در حالت رها شدن فنر طول آزاد خود را داشته باشد، خواهیم داشت $v_g)_3 = -mg \frac{\delta}{2}$, $v_g)_2 = -mg \delta$, $v_g)_1 = 0$ در این صورت $v_3 = \sqrt{2gh}$, $\delta = h$ بدست می‌آید که در این صورت گزینه (۲) درست می‌باشد.

تست سال (۷۷ - ۷۸)

توپی گلوله‌ای را با سرعت u (نسبت به لوله‌اش) که زاویه α با افق دارد شلیک می‌نماید. توپ ابتدا در حال سکون بوده اما قادر است که به وسیله چرخ‌هایش به حرکت درآید. اگر جرم توپ M و جرم گلوله m باشد سرعت حرکت توپ v_T درست هنگامی که گلوله توپ را ترک می‌نماید کدامیک از پاسخ‌های زیر است؟



اگر سرعت مطلق گلوله با \vec{v}_g و سرعت مطلق تانک را با \vec{v}_T و سرعت نسبی گلوله نسبت به تانک را با $\vec{v}_{g/T}$ نمایش دهیم داریم:
 $\vec{v}_g = \vec{v}_T + \vec{v}_{g/T} \Rightarrow v_g)_x = u \cos \alpha - v_T$

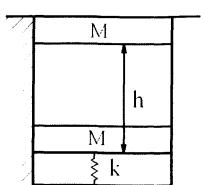
در راستای افق هیچ نیروی خارجی وجود ندارد لذا قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای محور x برقرار است.

$$G_x)_1 = G_x)_2 \Rightarrow 0 = -Mv_T + m v_g)_x = -Mv_T + m(u \cos \alpha - v_T) \rightarrow v_T = \frac{m}{m+M} u \cos \alpha$$

لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۶)

جسمی به جرم M طبق شکل از ارتفاع h رها شده و بر روی جسم دیگری به همان جرم می‌افتد. این جسم توسط فنری با ضریب سختی k نگه داشته شده است. اگر برخورد کاملاً پلاستیک فرض شود، مقدار سرعت جسم متصل به فنر بلافاصله پس از برخورد کدام است؟



$$\sqrt{gh} \quad (۱)$$

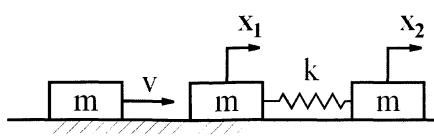
$$\sqrt{2gh} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{gh}}{2} \quad (۳)$$

سرعت جسم بالایی پس از طی ارتفاع h برابر با $\sqrt{2gh}$ خواهد بود.
 $M\sqrt{2gh} + M \times 0 = 2Mv \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2gh}}{2} = \frac{\sqrt{gh}}{2}$
 لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۷)

دو جرم مساوی m به وسیله فنری با ضریب k به یکدیگر متصل شده‌اند و روی سطحی افقی و بدون اصطکاک در حالت سکون هستند و فنر آزاد است. جرم مساوی دیگر m با سرعت V با جرم اول برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. سرعت سیستم در هنگام حداکثر فشردگی فنر برابر است با:

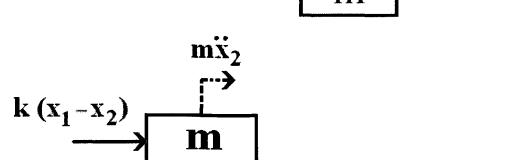


$$\frac{V}{3} \quad (۱)$$

$$V \quad (۲)$$

$$\frac{V}{2} \quad (۳)$$

راه حل صحیح مساله طولانی است. نخست این راه حل مطرح می‌گردد و سپس راه حلی که درست نبوده ولی کوتاه بوده ارایه می‌گردد. دیگر آزاد نیروهای وارد به اجرام متصل به فنر به صورت زیر می‌باشد. ($x_1 > x_2$)



$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_2 + kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ (ماتریس جرم)} \quad K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \text{ (ماتریس سختی)}$$

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2m^2\omega^4 - 3km\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases} \quad \text{مد صلب} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{k}{k - m\omega^2}$$

$$\frac{X_1}{X_2} \Big|_{\omega=\omega_1} = 1, \quad \frac{X_1}{X_2} \Big|_{\omega=\omega_2} = \frac{k}{k - 2m\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\right)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\text{ماتریس شکل مد}) \quad \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^* = \Psi^T K \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3k}{2} \\ 0 & \frac{3k}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9k}{4} \end{bmatrix}$$

$$M^* = \Psi^T M \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & -m \\ m & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & \frac{3m}{2} \end{bmatrix}$$

لذا معادله $M^* \dot{q} + K^* q = \{0\}$ به صورت $\dot{q} = \Psi^{-1} \{x\}$ که در آن $\{x\} = \{0\}$ می باشد.
لذا داریم:

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & \frac{3m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9k}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3m\ddot{q}_1 = 0 \Rightarrow q_1(t) = At + B \\ \frac{3}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{9k}{4}q_2 = 0 \Rightarrow q_2(t) = C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 - \frac{q_2}{2} \\ q_1 + q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = At + B - (C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t) \\ x_2(t) = At + B + (C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t) \end{cases}$$

بقای اندازه حرکت خطی برای دو جرم سمت راست

$$mv + m \times 0 = 2m\dot{x}_1(0) \Rightarrow \dot{x}_1(0) = \frac{v}{2}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = \frac{v}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} B - \frac{C}{2} = 0 \\ A - \frac{D}{2}\omega_2 = \frac{v}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} B + C = 0 \\ A + D\omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = C = 0 \\ A = \frac{v}{3}, D = -\frac{v}{3\omega_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{v}{3}t + \frac{v}{3\omega_2}\sin\omega_2 t = \frac{v}{3}\left(t + \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right) \\ x_2(t) = \frac{v}{3} - \frac{v}{3\omega_2}\sin\omega_2 t = \frac{v}{3}\left(t - \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right) \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{v}{3}\left(\frac{2\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right) = \frac{2v}{3}\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}$$

فاصله دو جرم، $|x_1 - x_2|$ زمانی ماکزیمم است که $t = \frac{\pi}{2\omega_2}$ که در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \left(\frac{\pi}{2\omega_2} \right) = \frac{v}{3} \left(1 + \cos \left(\omega_2 \frac{\pi}{2\omega_2} \right) \right) = \frac{v}{3} \\ \dot{x}_2 \left(\frac{\pi}{2\omega_2} \right) = \frac{v}{3} \left(1 - \cos \left(\omega_2 \frac{\pi}{2\omega_2} \right) \right) = \frac{v}{3} \end{cases}$$

که جواب گزینه ۲ می‌باشد.

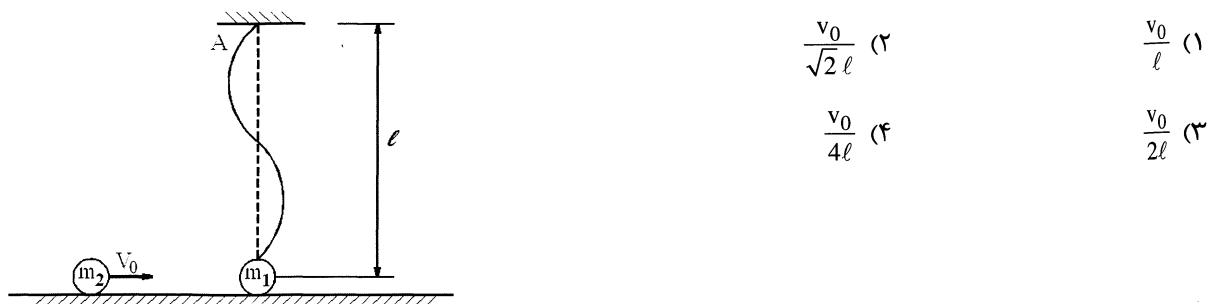
به نظر می‌رسد که طراحان فرض نموده‌اند که به دلیل نبود اصطکاک جرم سمت راستی بدون هیچ ممانعتی از حرکت می‌تواند حرکت کند و لذا فنر اصلاً فشرده نمی‌شود و مجموعه اجرام متصل به فنر مانند یک جرم $2m$ عمل می‌کنند، در این صورت بنابر بقای اندازه حرکت خطی داریم:

$$mv + 2m \times 0 = (m + 2m)v^* \Rightarrow v^* = \frac{v}{3}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

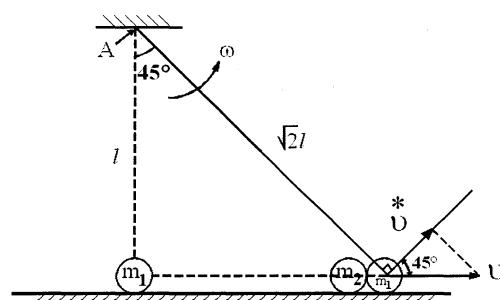
جرم m_1 توسط نخی به طول $\sqrt{2}\ell$ به نقطه A متصل شده است و در اثر برخورد پلاستیک گلوله m_2 با سرعت v_0 به آن به حرکت در می‌آید. در صورتی که حرکت کل مجموعه در صفحه افق انجام گیرد. با فرض $m_1 = m_2 = m$ سرعت زاویه‌ای نخ در اولین لحظه‌ای که تحت کشش قرار می‌گیرد برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای برخورد برای مجموعه اجرام ($m_1 = m_2 = m$)

$$mv_0 + m \times 0 = 2mv \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

$$v^* = v \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{v_0}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} v_0}{4} = \sqrt{2} \ell \omega$$

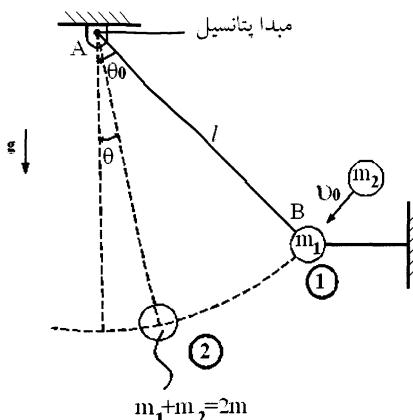


مولفه در راستای ریسمان سرعت v بعد از این که نخ تحت کشش قرار گرفت به طور ناگهانی صفر می‌شود.

$$\Rightarrow \omega = \frac{v_0}{4\ell}$$

۳۹ مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | برخورد ذرات

تست سال (۷۸ - ۷۹)



نقطه مادی به جرم m_1 در صفحه قائم توسط دو نخ بدون جرم مطابق شکل نگاه داشته شده است. در اثر برخورد پلاستیک گلوله‌ای به جرم m_2 و سرعت v_0 در راستای نشان داده شده نخ افقی پاره شده و سیستم تبدیل به یک آونگ ساده می‌شود حداکثر کشش ایجاد شده در نخ AB با فرض

$$\text{نقطه مادی به جرم } m_1 \text{ در صفحه قائم توسط دو نخ بدون جرم مطابق شکل نگاه داشته شده است. در اثر برخورد پلاستیک گلوله‌ای به جرم } m_2 \text{ و سرعت } v_0 \text{ در راستای نشان داده شده نخ افقی پاره شده و سیستم تبدیل به یک آونگ ساده می‌شود حداکثر کشش ایجاد شده در نخ AB با فرض} \\ \theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ و } v_0 = 2\sqrt{gl} \text{ برابر است:}$$

$$3mg \quad (۲) \qquad mg \quad (۱)$$

$$6mg \quad (۴) \qquad 4mg \quad (۳)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه:

$$mv_0 + m \times 0 = 2m v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{2} = \sqrt{gl}$$

بقای انرژی بین موقعیت‌های ① و ② (نیروی کشش نخ همواره بر راستای جابه‌جایی اجرام عمود است و لذا کاری انجام نمی‌دهد):

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} 2m v_1^2 = m \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 = mg \ell \\ v_g \Big|_1 = -2mg \ell \cos \theta_0 = -2mg \ell \cos \frac{\pi}{3} = -mg \ell \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + v_g \Big|_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} (2m) v_2^2 \\ v_g \Big|_2 = -2mg \ell \cos \theta \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + v_g \Big|_2 = m v_2^2 - 2mg \ell \cos \theta$$

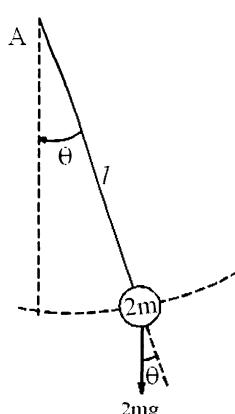
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{v_2^2}{\ell} = 2g \cos \theta$$

قانون دوم نیوتون در راستای کشش نخ:

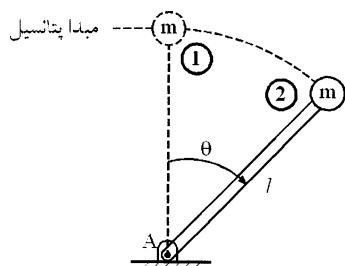
$$\sum F_n = 2ma_n$$

$$\Rightarrow T - 2mg \cos \theta = (2m) \frac{v_2^2}{\ell} = (2m)(2g \cos \theta) \Rightarrow T = 6mg \cos \theta$$

لذا جواب گزینه (۴) می‌باشد.



تست سال (۷۴ - ۷۵)



در شکل زیر جرم m به میله بدون وزنی به طول L متصل است. اگر جرم را از موقعیت $\theta=0$ رها کنیم، در چه زوایه‌ای نیروی فشاری در میله صفر می‌گردد؟

- | | | |
|----------------|------------------|------------------|
| (۱) 45° | (۲) 48.2° | (۳) 56.4° |
| (۴) 60° | | |

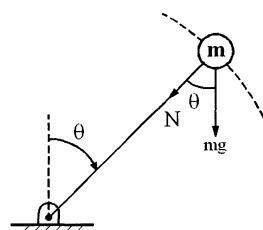
چون نیروی وارد از میله به جرم همواره بر راستای جابه‌جایی جرم عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد و قانون بقای انرژی بین موقعیت‌های ① و ② برقرار است، لذا داریم:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ v_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + v_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \\ v_g)_2 = -mg(\ell - \ell \cos \theta) \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + v_g)_2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell(1 - \cos \theta) = E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{\ell} = 2g(1 - \cos \theta)$$

: نیروی وارد از جرم به میله در راستای میله

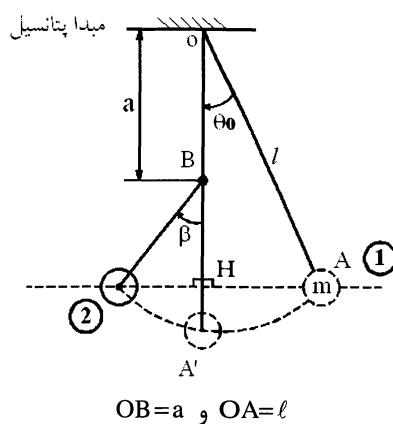


$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N + mg \cos \theta = \frac{mv^2}{\ell} = 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow N = mg(2 - 3\cos \theta) = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta \approx 48.2^\circ$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۰ - ۷۱)



گلوله پاندول ساده با زاویه انحراف θ_0 از سکون رها می‌شود. میخی در نقطه B جلوی حرکت نصف نخ را (مطابق شکل) می‌گیرد. گلوله پاندول حداکثر چه زوایه‌ای را طی خواهد کرد؟

- | | | |
|----------------------------|------------------------|------------------------|
| (۱) $\beta = \theta_0$ | (۲) $\beta > \theta_0$ | (۳) $\beta < \theta_0$ |
| (۴) بستگی به محل میخ دارد. | | |

۴۱ | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه | برخورد ذرات

چون راستای نیروی کشش نخ در کل مسیر بر راستای جابه‌جایی جرم m عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد و قانون بقای انرژی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ v_g)_1 = -mg \ell \cos \theta_0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + v_g)_1 = -mg \ell \cos \theta_0$$

$$\begin{cases} T_2 = 0 \\ v_g)_2 = -[a + (\ell - a) \cos \beta] mg \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + v_g)_2 = -mg [a + (\ell - a) \cos \beta]$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \ell \cos \theta_0 = a + (\ell - a) \cos \beta \quad \xrightarrow{\text{if } a = \frac{\ell}{2}} \cos \beta = 2 \cos \theta_0 - 1$$

مطلوب جدول برای $a = \frac{\ell}{2}$ می‌باشد. (مطلوب شکل داریم π و $\theta_0 \neq 0$)

θ_0	30°	60°	90°
β	42.94°	90°	180°

$$\text{if } \theta_0 = \beta \Rightarrow \cos \theta_0 = \cos \beta \Rightarrow \ell \cos \theta_0 = a + (\ell - a) \cos \beta = \ell \cos \beta \Rightarrow a(1 - \cos \beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \beta \neq \theta_0 \end{cases}$$

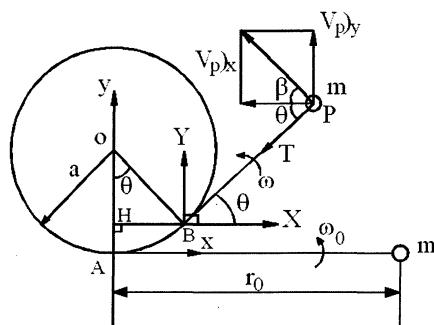
امکان ندارد.

بستگی به محل میخ یعنی فاصله a یا $\theta_0 = \beta$ و یا $\theta_0 < \beta$ می‌باشد که با توجه به این‌که در صورت مساله $a = \frac{\ell}{2}$ می‌باشد همواره داریم $\beta > \theta_0$ و لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

قوانين بقا:

در این بخش سه قانون بقای انرژی، و بقای اندازه حرکت خطی و بقای اندازه حرکت زاویه‌ای برای مثال‌های مختلفی بررسی می‌شود. بدیهی است که تمامی این قوانین از قانون دوم نیوتون با اعمال فرضیاتی به دست آمده و تمامی مسایلی که با این قوانین حل می‌شوند را می‌توان با قانون دوم نیوتون نیز حل نمود. منتها کاربرد این قوانین سبب حل ساده‌تر مسایل می‌گردد. در مثال‌های ذیل مسایلی مطرح می‌باشد که برای آن‌ها یک یا چندین قانون بقا تواناً برقرار می‌باشد. با مقایسه این مثال‌ها می‌توان فهمید که در هر مورد از چه قانون بقایی برای حل مساله می‌توان استفاده نمود.

مثال (۱): جرم m به یک ریسمان متصل شده و ریسمان حول استوانه‌ای به شعاع a می‌پیچد به طوری که همواره ریسمان تحت کشش بوده و مسیر حرکت جرم در صفحه افق قرار دارد. چه رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای ریسمان برقرار است؟ $BP=r$



هنگامی که ریسمان حول استوانهای می‌پیچد طول ریسمان از r_0 به r تغییر می‌کند و به اندازه طول کمان AB یعنی $a\theta$ از طول

$$r=r_0 - a\theta$$

نخست سعی می‌کنیم در این مثال مسیر حرکت جرم m را بررسی نماییم.

مختصات نقطه P در دستگاه مختصات XY عبارت است از $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ و مختصات نقطه B در دستگاه مختصات xy

$$(BH=a \sin \theta, AH=a - a \cos \theta)$$

حرکت نقطه P می‌باشد عبارت است از:

$$\begin{cases} x_P = a \sin \theta + r \cos \theta = a \sin \theta + (r_0 - a \theta) \cos \theta \\ y_P = a(1 - \cos \theta) + r \sin \theta = a(1 - \cos \theta) + (r_0 - a \theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_P)_x = \dot{x}_P = a \dot{\theta} \cos \theta - a \cos \theta - \dot{\theta}(r_0 - a \theta) \sin \theta = -\dot{\theta} r \sin \theta \\ (v_P)_y = \dot{y}_P = a \dot{\theta} \sin \theta - a \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}(r_0 - a \theta) \cos \theta = \dot{\theta} r \cos \theta \end{cases}$$

$$v_P = \sqrt{[(v_P)_x]^2 + [(v_P)_y]^2} = r \dot{\theta}$$

$$\tan \beta = \left| \frac{(v_P)_y}{(v_P)_x} \right| = \left| \frac{r \dot{\theta} \cos \theta}{r \dot{\theta} \sin \theta} \right| = |\cot \theta| \Rightarrow \beta + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \theta$$

بنابراین بردار سرعت مسیر حرکت جرم به ریسمان عمود است.

و اندازه سرعت جرم m برابر است با فاصله جرم تا نقطه تماس با استوانه و یا طول ریسمان (r) ضرب در سرعت زاویه‌ای ریسمان بنابراین نقطه تماس در هر لحظه همواره مرکز آنی دوران نقطه P خواهد بود.

مسیر حرکت جرم m که از معادلات پارامتری $(x_P(\theta), y_P(\theta))$ تبعیت می‌کند یک منحنی می‌باشد که منحنی اینولوت نامیده می‌شود.

شعاع انحنای مسیر حرکت جرم m نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''_P x'_P - x''_P y'_P}{[(x'_P)^2 + (y'_P)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} x'_P = -(r_0 - a \theta) \sin \theta \\ y'_P = (r_0 - a \theta) \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''_P = a \sin \theta - (r_0 - a \theta) \cos \theta \\ y''_P = -a \cos \theta - (r_0 - a \theta) \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_0 - a \theta} \Rightarrow \rho = r = r_0 - a \theta$$

بنابراین شعاع انحنای مسیر نقطه P برابر است با r به عبارت دیگر نقطه تماس مرکز انحنای مسیر نیز می‌باشد. بنابراین مثال مذکور

حالت جالبی است که در آن $\rho = r$ (شعاع انحنای مسیر با شعاع دوران برابر است) ولی مسیر دایروی نمی‌باشد.

تنها نیروی وارد به جرم نیروی کشش ریسمان و نیروی وزن می‌باشد. در دستگاه قائم و مماسی داریم:

$$\begin{cases} \sum F_n = ma_n \Rightarrow T = ma_n = m \frac{v^2}{r} = \frac{m(r\omega)^2}{r} = mr\omega^2 \Rightarrow T = mr\omega^2 \\ \sum F_t = ma_t \Rightarrow a_t = \ddot{v} = 0 \Rightarrow v = r\omega = \text{constant} \Rightarrow r_0 \omega_0 = r\omega \end{cases}$$

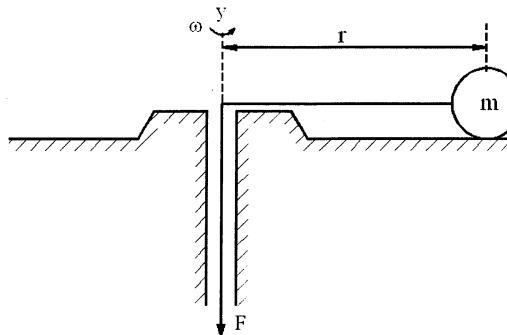
در جهت عمود بر ریسمان هیچ نیروی خارجی به جرم وارد نمی‌شود. اگر جرم سوراخی داشت و به جای ریسمان یک میله از داخل آن عبور می‌کرد در این صورت نیروی عکس العمل بین میله و جرم به عنوان نیروی عمود بر میله یا $\sum F_t$ وجود داشت.

مساله فوق به وسیله قانون دوم نیوتون به طور کامل تحلیل شد. سؤال این است که چگونه همین مساله را می‌توانستیم به کمک قوانین بقا ساده‌تر حل کنیم. از آنجایی که نیروی کشش همواره به مسیر حرکت جرم m عمود است (سرعت همواره مماس بر مسیر است و عمود بر راستای کشش نخ) لذا هیچ کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین کار نیروی کشش، صفر است. از طرفی جرم m در صفحه افقی حرکت می‌کند لذا ارزی پتانسیلی ثقلی آن تغییر نمی‌کند. بنابراین قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است و متعاقب آن انرژی جنبشی نیز بقا خواهد داشت.

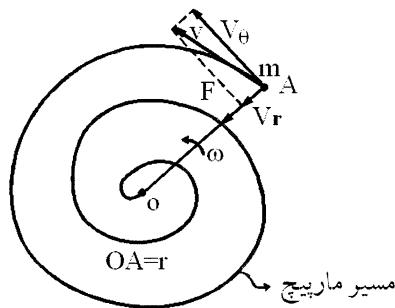
$$\Delta E = \Delta T + \Delta v_g = 0 \quad \xrightarrow{\Delta v_g = 0} \quad \Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = v \quad \Rightarrow \quad r\omega_0 = r\omega$$

بنابراین در این مساله قانون بقای انرژی نیز نتیجه مشابهی با نتیجه به دست آمده از قانون دوم نیوتون ارایه می‌دهد. چون $v_0 = v$ لذا $mv_0 = mv$ و یا $G_0 = G$ ، نکته‌ای که باید توجه داشت، آن است که به ظاهر قانون بقای اندازه حرکت خطی نیز برقرار است. ولی این قانون زمانی مطرح می‌باشد که جمع نیروها در یک راستای ثابت، صفر باشد که در این صورت اندازه حرکت خطی در آن راستا بقا خواهد داشت. ولی در این مثال راستای \bar{G}_0 و \bar{G} تغییر می‌کند و لزوماً نمی‌توان برقراری این قانون را با دلایل فیزیکی توجیه نمود.

مثال (۲): جرم m توسط یک ریسمان که از سوراخ یک صفحه عبور کرده با نیروی F کشیده می‌شود. جرم m حول سوراخ با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند و به سوراخ نیز نزدیک می‌شود لذا جرم مسیر مارپیچی مطابق شکل را طی می‌کند. کار نیروی F را محاسبه کنید.



جرم m علاوه بر چرخش حول محور y به محل سوراخ نیز نزدیک می‌شود لذا دارای دو مولفه سرعت می‌باشد. یکی در راستای عمود بر ریسمان که سبب چرخش جرم حول سوراخ می‌شود ($v_\theta = r\omega$) و مولفه دیگر سرعت به دلیل نزدیک شدن جرم به محل سوراخ ایجاد می‌شود و در جهت ریسمان می‌باشد. ($v_r = \dot{r}$)

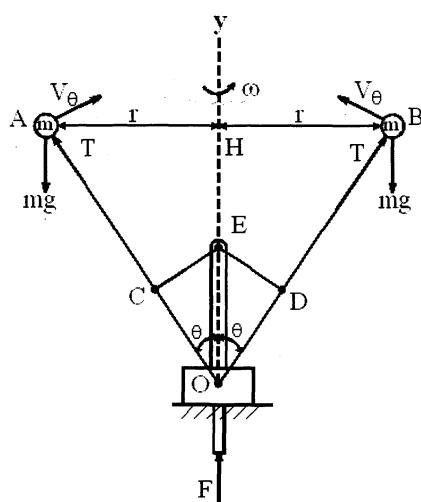


راستای نیروی کشش نخ در راستای سرعت دارای مولفه می‌باشد لذا نمی‌توان فرض نمود که جمع نیروها در راستای سرعت صفر است. لذا قانون بقای اندازه حرکت خطی برقرار نیست. از طرفی راستای نیروی F بر راستای سرعت عمود نمی‌باشد. لذا نیروی F کار انجام می‌دهد و قانون بقای انرژی نیز برقرار نیست.

راستای نیروی F همواره از سوراخ می‌گذرد لذا گشتاور نیروی F حول سوراخ یا محور y صفر است. بنابراین قانون بقای اندازه حرکت $H_y)_1 = H_y)_2$ زاویه‌ای برقرار است.

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times \vec{v}_r + \vec{r} \times \vec{v}_\theta \xrightarrow{\vec{r} \parallel \vec{v}_r} = \vec{r} \times \vec{v}_\theta \\ \Rightarrow |\vec{H}_y| &= |\vec{r} \times m\vec{v}| = |\vec{r} \times m\vec{v}_\theta| = mr v_\theta = mr(r\omega) = mr^2\omega \Rightarrow r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \Rightarrow r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \\ (F \cdot W_F) &= \Delta T + \Delta v_g = \Delta T = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left([v_\theta)_2]^2 + [v_r)_2]^2\right) - \frac{1}{2}m\left([v_\theta)_1]^2 + [v_r)_1]^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left((r_2 \omega_2)^2 + (r_2)^2\right) - \frac{1}{2}m\left((r_1 \omega_1)^2 + (r_1)^2\right) \end{aligned}$$



مثال (۳): گاوزنر وسیله‌ای است که برای کنترل دور به کار می‌رود. دو جرم m در نقاط A و B قرار دارند و حول محور y دوران می‌کنند. اجرام به ترتیب بر سر میله‌های OA و OB به طول ثابت ℓ قرار دارند، هنگامی که سرعت دوران ω افزایش می‌یابد، نیروهای گریز از مرکز هر جرم، $mr\omega^2$ افزایش یافته و دو جرم از هم دور می‌شوند یعنی میله‌های OA و OB حول O دوران کرده و زاویه θ افزایش می‌یابد. در اثر این عمل نقاط C و D نیز از هم دور شده و میله‌های CE و ED سبب می‌شوند تا نقطه E و میله گذرنده از این نقطه پایین بیاید و به کمک آن می‌توان ورودی سوخت یا بخار یا هر منبع تغذیه دیگر را کنترل نمود تا از افزایش دور جلوگیری نماید.

چه رابطه‌ای بین سرعت‌های زاویه‌ای ω در موقعیت‌های مختلف اجرام وجود دارد؟ از آنجایی که نقطه O ثابت می‌باشد لذا مکان هندسی نقاط B و A یا مسیر حرکت اجرام A و B یک مارپیچ در کره‌ای به مرکز O و شعاع ℓ خواهد بود.

تنها نیروهای وارد بر اجرام نیروهای T و mg (نیروی محوری وارد از میله به جرم m) هستند. این نیروها حول محور y گشتاوری ندارند. لذا قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور y برقرار است.

جرم m دارای دو مؤلفه سرعت v_θ و v_t می‌باشد چرا که هم حول O دوران می‌کند و هم حول محور y دوران می‌کند.

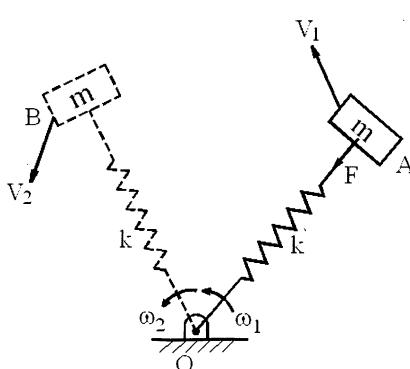
$$H_y = \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times m\vec{v}) = \hat{\lambda} \cdot [\vec{r} \times m(\vec{v}_\theta + \vec{v}_t)]$$

که در آن $\hat{\lambda}$ برداریکه در جهت محور y می‌باشد و بردار \vec{r} عمود است لذا بر $\hat{\lambda}$ نیز عمود است و بنابراین $(\vec{r} \times \vec{v}_\theta) \cdot \hat{\lambda} = 0$. از طرفی بردار \vec{v}_t بر \vec{r} عمود است و $\vec{r} \times \vec{v}_t$ هم جهت با $\hat{\lambda}$ می‌باشد.

$$H_y = m\hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}_t) = mr v_t = mr(r\omega) = mr^2\omega$$

$$\Rightarrow H_y)_1 = H_y)_2 \Rightarrow r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \xrightarrow{r = \ell \sin \theta} \omega_1 \sin^2 \theta_1 = \omega_2 \sin^2 \theta_2$$

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه ابرخورد ذرات ۴۵



مثال (۴): جرم m بر روی یک صفحه افقی بدون اصطکاک قرار دارد و به یک فنر با ثابت k که در نقطه O ثابت می‌باشد متصل گردیده است. جرم با سرعت اولیه v_1 شروع به حرکت می‌کند و به موقعیت دیگر می‌رود که سرعت در این موقعیت v_2 می‌باشد. رابطه بین سرعت‌های v_1 و v_2 را بباید.

تنها نیروی صفحه‌ای وارد بر جرم m نیروی پایستار فنر می‌باشد که امتداد آن همواره از نقطه O می‌گذرد و لذا گشتاور این نیرو حول O صفر می‌باشد و در نتیجه قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول این نقطه برقرار است. یعنی داریم:

بردار سرعت \vec{v} جرم m دارای دو مؤلفه سرعت می‌باشد. یک مؤلفه در راستای فنر v_r (چون فنر می‌تواند کشیده و یا فشرده شود و جرم m به نقطه O دور یا نزدیک خواهد شد) و دیگری در راستای عمود بر فنر v_θ (چون فنر حول نقطه O دوران می‌کند).

$$v_r = \dot{r} \quad \text{و} \quad v_\theta = r\omega$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_0 &= \bar{r} \times m \bar{v} = m \bar{r} \times (\bar{v}_r + \bar{v}_\theta) = m(\bar{r} \times \bar{v}_r + \bar{r} \times \bar{v}_\theta) \xrightarrow{\bar{r} \times \bar{v}_r = \bar{0}} = m \bar{r} \times \bar{v}_\theta \Rightarrow H_0 = m |\bar{r} \times \bar{v}_\theta| = m r v_\theta \\ &\Rightarrow H_0 = mr(r\omega) = mr^2\omega \Rightarrow H_0)_1 = H_0)_2 \Rightarrow [r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2] \end{aligned}$$

از طرفی نیروی F تنها نیروی صفحه‌ای پایستار است لذا قانون بقای انرژی مکانیکی نیز برقرار است و چون حرکت در صفحه افقی است لذا انرژی پتانسیل نقلی تغییر نمی‌کند و بنابراین داریم:

$$\Delta T + \Delta V_e = 0 \Rightarrow T_1 + V_e)_1 = T_2 + V_e)_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(r_1 - \ell)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k(r_2 - \ell)^2$$

که در آن r_2 و r_1 به ترتیب طول‌های اولیه و ثانویه فنر و ℓ طول آزاد فنر می‌باشد. و داریم:

$$\Rightarrow v_1^2 = (\dot{r}_1)^2 + (r_1 \omega_1)^2, \quad v_2^2 = (\dot{r}_2)^2 + (r_2 \omega_2)^2$$

تست سال (۷۷ - ۷۸)

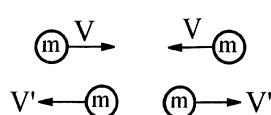
قانون بقای انرژی و قانون بقا منتم خطی دو قانون مستقل هستند. آیا امکان دارد با هم در یک مورد به توافق برسند؟

(۱) امکان دارد.

(۲) فقط به علت تصادف است که همیشه همدیگر را تایید می‌کنند.

(۳) همیشه همدیگر را تایید می‌کنند.

(۴) یکی از دیگری قابل به دست آوردن است.



امکان دارد در یک مورد هر دو قانون به توافق برسند به عنوان مثال در برشور استیک کامل دو جرم مساوی m قانون بقای اندازه حرکت خطی برای دو جرم در راستای ضربه برقرار است یعنی داریم: $2mv = 2mv'$

لذا داریم: $v = v'$, از طرفی داریم:

$$v = v' \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) \Rightarrow T = T' \Rightarrow$$

یعنی قانون بقای انرژی نیز برقرار است.

بنابراین جواب گزینه (۱) می‌باشد.

فصل چهارم

دینامیک اجسام صلب

حرکت صفحه‌ای

هنگامی که صحبت از جسم صلب به میان می‌آید. سه نوع حرکت مطرح می‌باشد.

الف) حرکت انتقالی:

در این حرکت تمامی نقاط جسم صلب دارای سرعت خطی یکسان هستند و بردار سرعت نقاط مختلف جسم همسنگ یکدیگر

می‌باشند در این صورت قانون دوم نیوتن به صورت زیر خواهد بود.

$\bar{F} = m \bar{a}_G$ شتاب مرکز ثقل جسم صلب می‌باشد.

ب) حرکت دورانی:

در این حرکت جسم حول یک نقطه ثابت دوران می‌کند و هر نقطه جسم دارای سرعت خطی است که از حاصل ضرب شعاع دوران

(فاصله نقطه مورد نظر تا مرکز دائمی دوران) در سرعت زاویه‌ای جسم صلب به دست می‌آید. قانون دوم نیوتن برای حرکت صفحه‌ای به

صورت زیر به دست می‌آید.

$M_0 = I_0 \alpha$ (جمع گشتاور نیروهای خارجی واردہ به جسم صلب حول نقطه ۰)

که در آن I_0 لختی یا ممان اینرسی قطبی جسم حول نقطه ۰ می‌باشد و α شتاب زاویه‌ای جسم صلب می‌باشد.

در مورد این رابطه و مفهوم سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم صلب بعداً توضیح داده می‌شود.

ج) حرکت عمومی:

حرکتی است که جسم هم دارای انتقال و هم دوران می‌باشد. به عبارت دیگر در حالت کلی هم مرکز جرم جسم، دارای سرعت و شتاب خطی است و هم جسم دارای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای است. سرعت و شتاب زاویه‌ای جسم بدین صورت تعریف می‌شود که در ابتدا یک خط ثابت بر روی جسم صلب در نظر گرفته می‌شود و سپس تغییرات زاویه این خط ثابت نسبت به یک خط مرجع سنجیده می‌شود.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

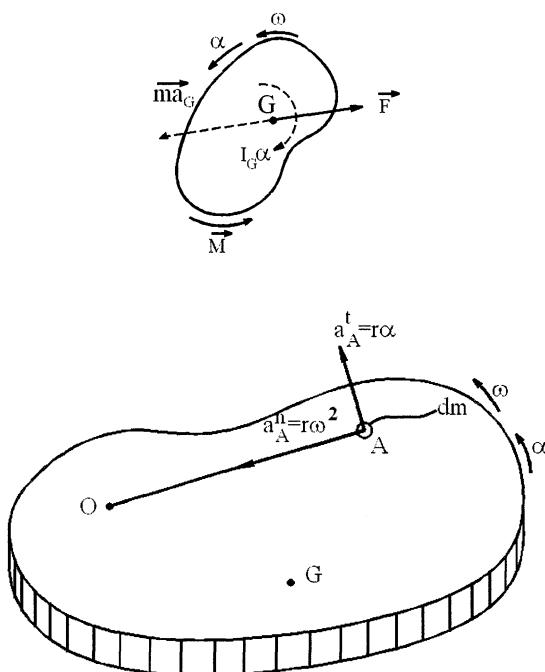
$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

قانون دوم نیوتن در این حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{F} = m \ddot{a}_G$$

$$M_G = I_G \alpha$$

که در آن I_G لختی یا ممان اینرسی قطبی جسم صلب نسبت به مرکز جرم (G) می‌باشد.

**اصل دالamber:**

برای جسم صلب جهت ایجاد یک تعادل ساختگی (تعادل شبه استاتیکی) نیروی اینرسی $-m\ddot{a}_G$ و گشتاور اینرسی $-I_G \alpha$ را به سیستم اعمال می‌کنیم. در این صورت جمع نیروها و گشتاورها وارد جسم صفر خواهد بود.

قانون‌های بقا ارایه شده برای ذره می‌تواند برای جسم صلب نیز به کار رود منتها می‌بایستی روابطی ارایه گردد که بتوان گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای و خطی و انرژی جنبشی را برای جسم صلب به دست آورد. این روابط به صورت زیر به دست می‌آیند.

الف) جسم حول نقطه ثابت O (مرکز دائمی دوران) دوران می‌کند:

یک المان جرم dm روی جسم صلب در نظر می‌گیریم، مولفه‌های شتاب المان a_A^t و a_A^n است.

بنابراین نیروهای وارد به این جسم $dm a_A^t$ و $dm a_A^n$ می‌باشند. که تنها نیروی $dm a_A^t$ حول نقطه O گشتاور دارد.

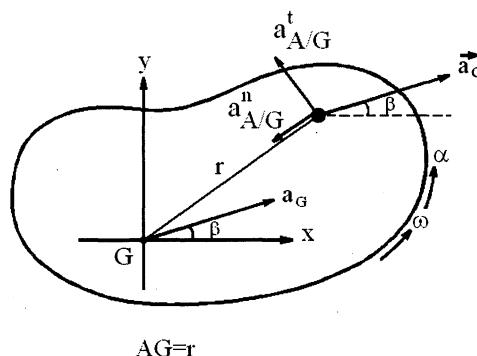
$$dM_O = r(dm a_A^t) = r(dm) r\alpha = (r^2 dm) \alpha \Rightarrow M_O = \alpha \int r^2 dm = I_O \alpha$$

که رابطه بالا $I_o = \int r^2 dm$ لختی دورانی یا ممان اینرسی قطبی حول نقطه O نامیده می‌شود. بنابراین گشتاور حول نقطه دایمی دوران از رابطه محاسبه می‌شود. از طرفی می‌دانیم $M_o = \dot{H}_o$ که در آن $H_o = I_o \alpha$ جسم صلب حول نقطه O می‌باشد.

$$M_o = \dot{H}_o = I_o \alpha = I_o \dot{\omega} \Rightarrow H_o = I_o \omega$$

ب) جسم دارای حرکت عمومی است:

المان جرم dm را در نظر می‌گیریم مولفه‌های شتاب نقطه A، $a_{A/G}$ و $\vec{a}_{A/G}$ خواهند بود چرا که $a_{A/G} = \frac{v_{A/G}^2}{AG} = r\omega^2$ و $\vec{a}_{A/G} = \vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}^t + \vec{a}_{A/G}^n$ می‌باشد. بنابراین نیروهای وارد به المان dm و $dm a_G$ و $r\omega^2 dm$ می‌باشند. چون راستای نیروی $r\omega^2 dm$ از نقطه G می‌گذرد هیچ گشتاوری حول نقطه G ندارد و گشتاور نیروهای $dm a_G$ و $r\omega^2 dm$ حول نقطه G عبارت است از:



$$AG = r$$

$$dM_G = r(r\alpha dm) - (dm a_G \cos\beta) y_A + (dm a_G \sin\beta) x_A$$

نیروی $dm a_G$ دارای دو مولفه‌های در جهت محورهای x و y می‌باشد که عبارتند از $dm a_G \sin\beta$ و $dm a_G \cos\beta$ می‌باشد و گشتاور این مولفه‌ها مطابق رابطه بالا محاسبه می‌شوند.

$$M_G = \alpha \int r^2 dm - a_G \cos\beta \int y_A dm + a_G \sin\beta \int x_A dm$$

مختصات مرکز جرم جسم صلب از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x_G = \frac{\int x_A dm}{\int dm} = 0 \\ y_G = \frac{\int y_A dm}{\int dm} = 0 \end{cases}$$

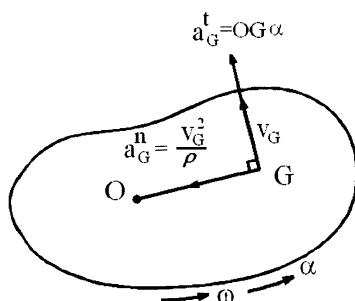
بنابراین با توجه به روابط بالا رابطه $M_G = I_G \alpha$ به صورت می‌آید.

$$M_G = \dot{H}_G = I_G \alpha = I_G \dot{\omega} \Rightarrow H_G = I_G \omega$$

اگر بخواهیم روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای را حول نقطه‌ای دلخواه (O) بنویسیم روابط اندکی پیچیده‌تر روابط بالا خواهد بود. ترم $m\vec{v}_G$ اندازه حرکت خطی مرکز جرم جسم صلب و ترم $m\vec{a}_G$ نیروی اینرسی مرکز جرم جسم صلب به صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{H}_o = \bar{H}_G + \overrightarrow{OG} \times (m\vec{v}_G)$$

$$\bar{M}_o = \bar{M}_G + \overrightarrow{OG} \times (m\vec{a}_G)$$



ج) اگر مرکز آنی دوران جسم مشخص باشد (نقطه O):

در این حالت روابط بالا ساده می‌شوند.

$$\begin{aligned} \overline{OG} \times m\vec{a}_G &= m\overline{OG} \times (\vec{a}_G^t + \vec{a}_G^n) = m(\overline{OG} \times \vec{a}_G^t + \overline{OG} \times \vec{a}_G^n) \xrightarrow{\overline{OG} \parallel \vec{a}_G^n} \\ \overline{OG} \times m\vec{a}_G &= m\overline{OG} \times \vec{a}_G^t \Rightarrow |\overline{OG} \times m\vec{a}_G| = mOG a_G^t = mOG^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{OG} \times m\vec{a}_G = mOG^2 \alpha \hat{k} \Rightarrow \bar{M}_O = M_O \hat{k} = \bar{M}_G + \overline{OG} \times m\vec{a}_G = M_G \hat{k} + mOG^2 \alpha \hat{k} \Rightarrow M_O = I_G \alpha + mOG^2 \alpha$$

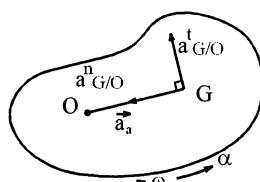
$$\Rightarrow M_O = (I_G + mOG^2) \alpha = I_O \alpha \Rightarrow [M_O = I_O \alpha] \Rightarrow M_O = \dot{H}_O = I_O \alpha = I_O \omega \Rightarrow [H_O = I_O \omega]$$

د) اگر روابط گشتاور اندازه حرکت خطی حول نقطه‌ای (O) نوشته شود که امتداد سرعت و شتاب آن نقطه از مرکز جرم بگذرد:

اگر امتداد شتاب نقطه O از مرکز جرم G بگذرد $\overline{OG} \parallel \vec{a}_O$ خواهد بود در این حالت نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O} = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/0}^n + \vec{a}_{G/0}^t \Rightarrow \overline{OG} \times \vec{a}_G = \overline{OG} \times (\vec{a}_O + \vec{a}_{G/0}^n + \vec{a}_{G/0}^t) = \overline{OG} \times \vec{a}_O + \overline{OG} \times \vec{a}_{G/0}^n + \overline{OG} \times \vec{a}_{G/0}^t$$

$$\xrightarrow{\overline{OG} \times \vec{a}_{G/0}^n = \vec{0}} \overline{OG} \times \vec{a}_G = \overline{OG} \times \vec{a}_{G/0}^t \Rightarrow |\overline{OG} \times \vec{a}_G| = |\overline{OG} \times \vec{a}_{G/0}^t| = OG a_{G/0}^t = OG(OG \alpha) = OG^2 \alpha$$



$$\Rightarrow \overline{OG} \times \vec{a}_G = OG^2 \alpha \hat{k}$$

$$\bar{M}_O = \bar{M}_G + \overline{OG} \times (m\vec{a}_G) \Rightarrow M_O \hat{k} = M_G \hat{k} + mOG^2 \alpha \hat{k}$$

$$\Rightarrow M_O = M_G + mOG^2 \alpha = I_G \alpha + OG^2 \alpha = (I_G + mOG^2) \alpha = I_O \alpha$$

$$\Rightarrow [M_O = I_O \alpha]$$

به طور مشابه اگر امتداد سرعت نقطه O از مرکز جرم G بگذرد، $\overline{OG} \parallel \vec{v}_O$ خواهد بود و در این حالت داریم:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{V}_{G/0} \Rightarrow \overline{OG} \times \vec{V}_G = \overline{OG} \times (\vec{V}_O + \vec{V}_{G/0}) = \overline{OG} \times \vec{V}_O + \overline{OG} \times \vec{V}_{G/0} \xrightarrow{\overline{OG} \times \vec{V}_O = 0} \overline{OG} \times \vec{V}_G = \overline{OG} \times \vec{V}_{G/0}$$

$$\Rightarrow |\overline{OG} \times \vec{V}_G| = |\overline{OG} \times \vec{V}_{G/0}| = OG V_{G/0} = OG(OG \omega) = OG^2 \omega \Rightarrow \overline{OG} \times \vec{V}_G = OG^2 \omega \hat{k}$$

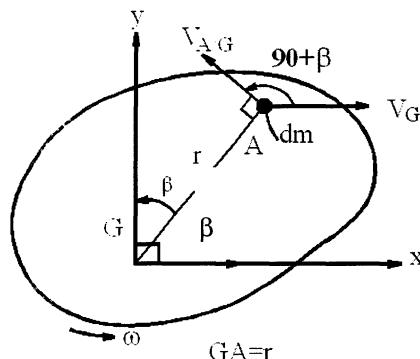
$$\Rightarrow \vec{H}_O = \vec{H}_G + \overline{OG} \times (m\vec{V}_G) \Rightarrow H_O \hat{k} = H_G \hat{k} + mOG^2 \omega \hat{k} \Rightarrow H_O = H_G + mOG^2 \omega = I_G \omega + mOG^2 \omega$$

$$\Rightarrow H_O = (I_G + mOG^2) \omega = I_O \omega \Rightarrow [H_O = I_O \omega]$$

انرژی جنبشی:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$$

الف) جسم دارای حرکت عمومی است:



المان جرم dm را در نقطه A در نظر می‌گیریم. سرعت نقطه A مجموع دو بردار سرعت \vec{V}_G و $\vec{V}_{A/G}$ که با یکدیگر زاویه $90 + \beta$ می‌سازند می‌باشد.

$$V_A^2 = V_G^2 + V_{A/G}^2 + 2 V_G V_{A/G} \cos(90 + \beta) = V_G^2 + (r\omega)^2 - 2 V_G r \omega \sin \beta$$

انرژی جنبشی المان عبارت است از:

$$dT = \frac{1}{2} dm V_A^2 = \frac{1}{2} dm (V_G^2 + r^2 \omega^2 - 2 V_G \omega r \sin \beta) \xrightarrow{r \sin \beta = x_A} dT = \frac{1}{2} dm (V_G^2 + r^2 \omega^2 - 2 V_G \omega x_A)$$

$$\Rightarrow T = \int dT = \frac{1}{2} \int V_G^2 dm + \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm - 2 V_G \omega \int x_A dm = \frac{m}{2} V_G^2 + \frac{I_G \omega^2}{2} - 2 V_G \omega \int x_A dm$$

$$x_G = 0 = \frac{\int x_A dm}{\int dm} \Rightarrow \int x_A dm = 0 \quad \text{از طرفی داریم:}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2}$$

ب) جسم دارای مرکز دورانی است:

اگر O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران جسم صلب باشد $V_G = OG \omega$ خواهد بود و لذا:

$$T = \frac{1}{2} m (OG \omega)^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} (m OG^2 + I_G) \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$$

جمع‌بندی:

۱) رابطه گشتاور برای یک جسم صلب حول نقطه O که در آن O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد شتاب آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در شتاب زاویه‌ای جسم صلب $(M_O = I_O \alpha)$.

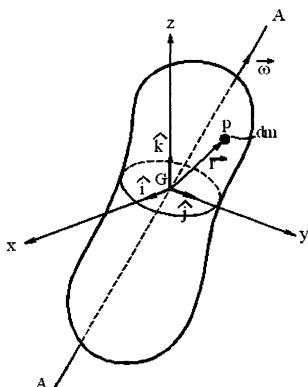
۲) رابطه اندازه حرکت زاویه‌ای برای یک جسم صلب حول نقطه O که در آن O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد سرعت آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در سرعت زاویه‌ای جسم صلب $(H_O = I_O \omega)$.

(۳) انرژی جنبشی در حالت کلی مجموع انرژی جنبشی دورانی $\left(\frac{1}{2} I_G \omega^2\right)$ و انرژی جنبشی انتقالی $\left(\frac{1}{2} m V_G^2\right)$ می‌باشد. در حالت

خاص می‌تواند به صورت $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$ بیان شود که O مرکز دائمی یا آنی دوران می‌باشد.

(۴) اگر O یک نقطه دلخواه باشد رابطه گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}\bar{M}_O &= \bar{M}_G + \bar{OG} \times (m \bar{a}_G) \\ \bar{H}_O &= \bar{H}_G + \bar{OG} \times (m \bar{V}_G)\end{aligned}$$



تحلیل سه بعدی:

جسم صلب سه بعدی را که حول محور A - A گذرنده از مرکز جرم جسم با سرعت زاویه‌ای $\bar{\omega}$ می‌چرخد در نظر می‌گیریم. بنابراین سرعت مرکز جرم G صفر خواهد بود و سرعت نقطه P که در آن المان جرم dm قرار دارد $\bar{V}_P = \bar{\omega} \times \bar{r}$ خواهد بود.

و سرعت نقطه P که در آن المان جرم dm قرار دارد $dH_G = \bar{r} \times dm \bar{V}_P = \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$

که در آن $\bar{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ و $\bar{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ می‌باشد.

$$\bar{H}_G = \int \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = ?$$

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(z\omega_y - y\omega_z) + (x\omega_z - z\omega_x)\hat{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}$$

$$\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[y(y\omega_x - x\omega_y) - z(x\omega_z - z\omega_x)] + \hat{j}[z(z\omega_y - y\omega_z) - x(y\omega_x - x\omega_y)] + \hat{k}[x(x\omega_z - z\omega_x) - y(z\omega_y - y\omega_z)]$$

$$= \hat{i}[\omega_x(y^2 + z^2) - xy\omega_y - xz\omega_z] + \hat{j}[\omega_y(z^2 + x^2) - xy\omega_x - yz\omega_z] + \hat{k}[(x^2 + y^2)\omega_z - yz\omega_y - xz\omega_x] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_G &= \hat{i}[\omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm] + \hat{j}[-\omega_x \int xy dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int yz dm] \\ &\quad + \hat{k}[-\omega_x \int xz dm - \omega_y \int yz dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm] = H_G)_x \hat{i} + H_G)_y \hat{j} + H_G)_z \hat{k}\end{aligned}$$

فاصل نقطه P از محورهای x و y و z به ترتیب: $\sqrt{x^2 + y^2}$ و $\sqrt{x^2 + z^2}$ و $\sqrt{y^2 + z^2}$ می‌باشد. در این صورت لختی دورانی حول

محورهای x و y و z به ترتیب به صورت: $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$ و $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$ و $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$ تعريف می‌شوند.

حاصل ضربهای لختی نیز به صورت: $I_{yz} = \int yz dm$ و $I_{xz} = \int xz dm$ و $I_{xy} = \int xy dm$ تعريف می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} H_G)_x = I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ H_G)_y = -I_{xy} \omega_x - I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ H_G)_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_G)_x \\ H_G)_y \\ H_G)_z \end{cases} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{cases} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{cases} \Rightarrow \{H_G\} = [I_G]\{\omega\}$$

اگر محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشند حاصل ضربهای لختی صفر خواهند شد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} H_G)_x = I_{xx} \omega_x \\ H_G)_y = I_{yy} \omega_y \\ H_G)_z = I_{zz} \omega_z \end{cases}$$

برای به دست آوردن رابطه گشتاور می بایستی از رابطه اندازه حرکت زاویه ای نسبت به زمان مشتق گرفت. اگر دستگاه مختصات Gxyz متصل به جسم صلب باشد با جسم صلب دوران خواهد نمود و بردارهای یکه دارای مشتق نسبت به زمان خواهند بود.

$$\begin{aligned} \bar{M}_G &= \dot{\bar{H}}_G = \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + H_G)_x \dot{\hat{i}} + H_G)_y \dot{\hat{j}} + H_G)_z \dot{\hat{k}} \\ &= \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + H_G)_x (\ddot{\omega} \times \hat{i}) + H_G)_y (\ddot{\omega} \times \hat{j}) + H_G)_z (\ddot{\omega} \times \hat{k}) \\ \Rightarrow \bar{M}_G &= \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + \ddot{\omega} \times (H_G)_x \hat{i} + H_G)_y \hat{j} + H_G)_z \hat{k} \\ \Rightarrow \bar{M}_G &= \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + \ddot{\omega} \times \bar{H}_G = M_G)_x \hat{i} + M_G)_y \hat{j} + M_G)_z \hat{k} \end{aligned}$$

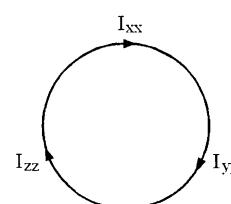
که در آن:

$$\begin{cases} \dot{H}_G)_x = I_{xx} \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y - I_{xz} \dot{\omega}_z \\ \dot{H}_G)_y = -I_{xy} \dot{\omega}_x + I_{yy} \dot{\omega}_y - I_{yz} \dot{\omega}_z \\ \dot{H}_G)_z = -I_{xz} \dot{\omega}_x - I_{yz} \dot{\omega}_y + I_{zz} \dot{\omega}_z \end{cases}$$

با جایگذاری روابط مولفه ها \bar{H}_G بر حسب مولفه های سرعت های زاویه ای ω_x و ω_y و ω_z در رابطه \bar{M}_G و استفاده از روابط بالا سه مولفه بردار گشتاور حول مرکز جرم G بر حسب مولفه های سرعت های زاویه ای ω_x و ω_y و ω_z و مولفه های شتاب های زاویه ای $\dot{\omega}_x$ و $\dot{\omega}_y$ و $\dot{\omega}_z$ به دست می آیند که این معادلات را معادلات اویلر می نامند و با معلوم بودن گشتاور خارجی می توان سه معادله اویلر را حل نمود و ω_x ، ω_y و ω_z را محاسبه نمود. حل این معادلات در حالت کلی ساده نیست لذا این معادلات برای حالتی که محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشد به صورت زیر ساده می شود.

معادلات اویلر در حالت خاص:

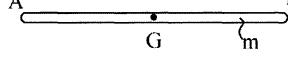
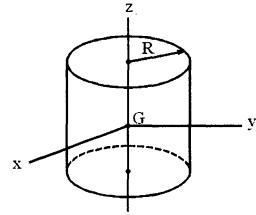
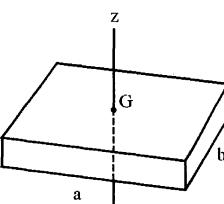
$M_G)_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$
$M_G)_y = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_{xx} - I_{zz})$
$M_G)_z = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x (I_{yy} - I_{xx})$



دایره ترسیم شده جهت حفظ کردن معادلات اویلر در حالت خاص به کار می رود.

۵۳ دینامیک اجسام صلب | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

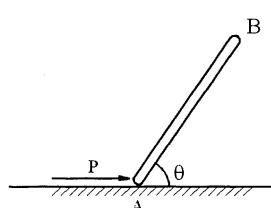
روابط لختی چند جسم صلب:

 $AB = \ell$ m میله یکنواخت به طول ℓ و جرم	$I_G = \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_A = I_B = I_G + mGA^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$
 استوانه به جرم m و شعاع قاعده R	$I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$ $I_{yy} = I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} = \frac{mR^2}{4}$
 مکعب به طول a و b و جرم	$I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

مثال‌هایی از دینامیک اجسام صلب:

تست سال (۷۵ - ۷۶)

به میله‌ای همگن به جرم $[kg] = 4$ نیروی افقی $[N] = 60$ وارد می‌شود. اگر این میله فقط دارای حرکت انتقالی باشد. زاویه تمایل θ آن نسبت به سطح افق چه مقدار می‌باشد؟



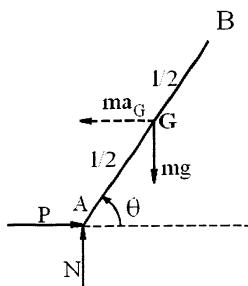
(سطح افقی را بدون اصطکاک فرض کنید)

43.2° (۴)

33.2° (۳)

23.2° (۲)

13.2° (۱)



دیاگرام آزاد

چون میله تنها حرکت افقی دارد لذا طبق اصل دالamber از مولفه $I_G \alpha$ صرفنظر شده است.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

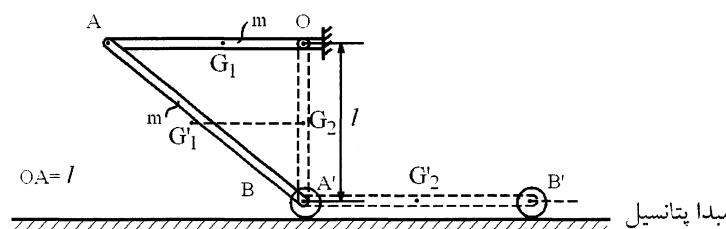
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow P \frac{l}{2} \sin \theta - N \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{N}{P} = \frac{mg}{P} = \frac{4 \times 9.81}{60} \Rightarrow \boxed{\theta \approx 33.2^\circ}$$

جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۷-۷۸)

سیستم شکل زیر از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌شود، سرعت نقطه B هنگامی که میله OA به صورت عمودی درآید کدامیک از پاسخ‌های زیر است؟ جرم هر کدام از میله‌ها برابر m است و حرکت در صفحه قائم رخ می‌دهد.



$$v = \sqrt{\frac{3g\ell}{2}} \quad (۴)$$

$$v = \sqrt{\frac{6g\ell}{7}} \quad (۳)$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\ell}{3}} \quad (۲)$$

$$v = \sqrt{\frac{24}{13}g\ell} \quad (۱)$$

قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است. موقعیت اول سیستم با شماره ① و موقعیت بعدی سیستم با شماره ② مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mg\ell + mg \frac{\ell}{2} = 3mg \frac{\ell}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega_{OA'}^2 + \frac{1}{2} m(V_{G'_2})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m\ell^2 \right) (\omega_{OA'})^2 + \frac{1}{2} m(V_{B'})^2 \\ V_g)_2 = mg \frac{\ell}{2} + 0 = mg \frac{\ell}{2} \end{cases}$$

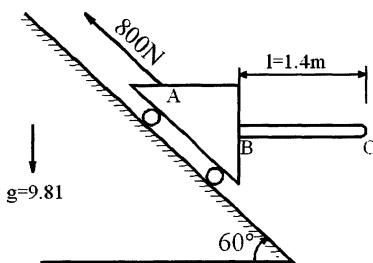
$$V_{A'} = V_{B'} = V_{G'_2} = \ell \omega_{OA'} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{6} m\ell^2 \left(\frac{V_{B'}}{\ell} \right)^2 + \frac{1}{2} m(V_{B'})^2 = \frac{2m}{3} (V_{B'})^2$$

$$\Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 3mg \frac{\ell}{2}, \quad E_2 = T_2 + V_g)_2 = \frac{2m}{3} (V_{B'})^2 + mg \frac{\ell}{2}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 3mg \frac{\ell}{2} = \frac{2m}{3} (V_{B'})^2 + mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow mg\ell = \frac{2m}{3} (V_{B'})^2 \Rightarrow \boxed{V_{B'} = \sqrt{\frac{3}{2} g\ell}}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۹)



بلوک A و میله متصل به آن مجموعاً دارای جرم 60 kg هستند که در راستای مسیر نشان داده شده با نیروی 800 N کشیده می‌شوند. میله دارای جرم 20 kg است و از نقطه B به بلوک جوش شده است. گشتاور خمی M در نقطه B (N.m) در نظر گرفته شود؟ (از اثرات اصطکاک صرف نظر کنید).

254 (۴)

196 (۳)

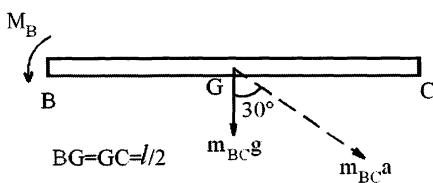
164 (۲)

137 (۱)

قانون دوم نیوتون در راستای موازی سطح شیب دار:

$$800 - (m_A + m_{BC})g \sin 60^\circ = (m_A + m_{BC})a$$

$$800 - (20 + 60) \times 9.81 \sin 60^\circ = (20 + 60)a \rightarrow a = 1.5 \left[\frac{m}{s} \right]$$



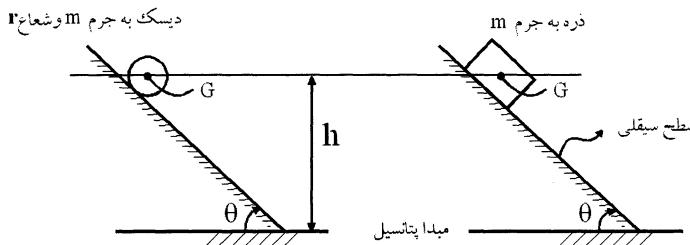
شتاب مجموعه تیرولوک A، a می‌باشد، لذا شتاب تیر BC نیز a خواهد بود طبق اصل دالamber نیروی اینرسی $m_{BC}a$ را در جهت عکس به سیستم اعمال می‌کنیم تا تعادل شبکه استاتیکی ایجاد می‌شود. در این صورت جمع گشتاورهای حول نقطه B صفر خواهد بود.

$$-M_B + (m_{BC}g + m_{BC}a \cos 30^\circ) \frac{l}{2} = 0 \rightarrow M_B = (20 \times 9.81 + 60 \times 1.5 \times \cos 30^\circ) \frac{1.4}{2} = 196 [N.m]$$

لذا جواب گزینه (۳) خواهد بود.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

اگر یک ذره و یک دیسک همگن هر دو با جرم m از یک ارتفاع یکسان بر روی سطح شیب دار با شیبی برابر، به طور همزمان رها شوند و دیسک در طول مسیر غلتش کامل داشته باشد، کدامیک زودتر به پایین سطح شیب دار خواهد رسید؟



(۱) ذره با جرم

(۲) دیسک با جرم

(۳) هر دو با هم به طور همزمان به پایین سطح شیب دار می‌رسند.

(۴) بستگی به ضریب اصطکاک بین دیسک و سطح شیب دار دارد.

الف) بقای انرژی برای ذره به جرم m

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mgh \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = mgh$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mv_G^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = \frac{1}{2}mv_G^2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow v_G)_\text{mass} = \sqrt{2gh}$$

ب) بقای انرژی برای دیسک به جرم m

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mgh \end{cases} \Rightarrow E_1 = mgh$$

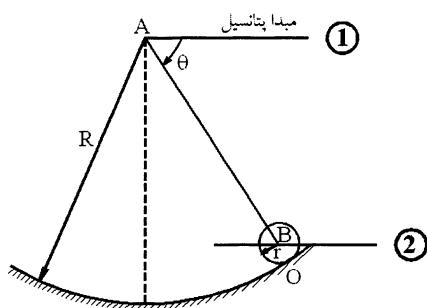
$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{v_G = r\omega} \frac{1}{2}I_G\left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{3}{4}mv_G^2$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{3}{4}mv_G^2 \Rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow v_G)_\text{disk} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

ذره سریعتر می‌رسد لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۶)

دیسک B به جرم m بر روی سطح دایروی به شعاع R می‌غلتد اگر دیسک از حالت سکون در $\theta = 0$ رها گردد، سرعت زاویه‌ای شعاع در $\theta = 90^\circ$ کدام است؟



$$\omega = \sqrt{\frac{4gR}{3r^2}} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{2R - r}} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R - r}} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3(R - r)}} \quad (3)$$

قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_0\omega_{\text{disk}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\omega_{\text{disk}}^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_{\text{disk}}^2 \\ V_g)_2 = -mg(R - r)\sin\theta \end{cases}$$

۵۷ دینامیک اجسام صلب | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

$$\Rightarrow E_2 = T_2 + V_g \Big)_2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_{disk}^2 - mg(R-r)\sin\theta$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{3}{4}mr^2\omega_{disk}^2 = mg(R-r)\sin\theta \Rightarrow \omega_{disk} = \sqrt{\frac{4g(R-r)\sin\theta}{3r^2}}$$

$$v_B = BO\omega_{disk} = r\omega_{disk} = BA\dot{\theta} = (R-r)\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r}{R-r}\omega_{disk} = \sqrt{\frac{4g\sin\theta}{3(R-r)}}$$

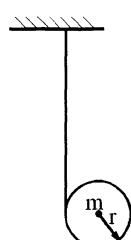
$$\dot{\theta} \Big|_{\theta=90^\circ} = \sqrt{\frac{4g}{3(R-r)}}$$

جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۶۹ - ۷۰)

استوانه‌ای به جرم m به شعاع r به وسیله طنابی که به دور آن پیچیده شده آویزان شده است. اگر استوانه رها شود، کشش در طناب

برابر است با (ممکن اینرسی استوانه حول مرکز جرم برابر $\frac{1}{2}mr^2$ است):



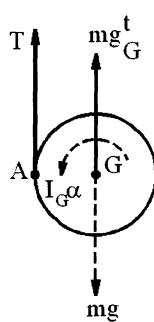
$$\frac{mg}{2} \quad (2)$$

$$\frac{mg}{3} \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$\frac{3mg}{5} \quad (3)$$

دیسک حول نقطه A دوران می‌کند و نقطه A مرکز آنی دوران است.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T + ma_G - mg = 0$$

$$T + mr\alpha - mg = 0 \Rightarrow \frac{mr\alpha}{2} + mr\alpha - mg = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2g}{3r}}$$

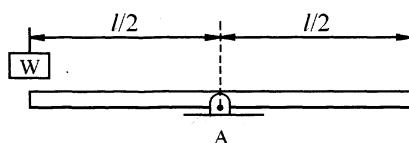
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -Tr + I_G\alpha = 0 \Rightarrow -Tr + \frac{mr^2}{2}\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mr\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{mr}{2} \left(\frac{2g}{3r} \right) = \boxed{\frac{mg}{3}}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۷)

میله‌ای به وزن W به طول L در حالت تعادل روی تکیه‌گاه A قرار گرفته است. شتاب زاویه‌ای میله در سمت لبه از لحظه‌ای که وزن $\frac{W}{g}$ را به آرامی در انتهای میله قرار می‌دهیم، برابر است با:



$$\frac{g}{6L} \quad (2)$$

$$\frac{g}{2L} \quad (1)$$

$$\frac{3g}{2L} \quad (4)$$

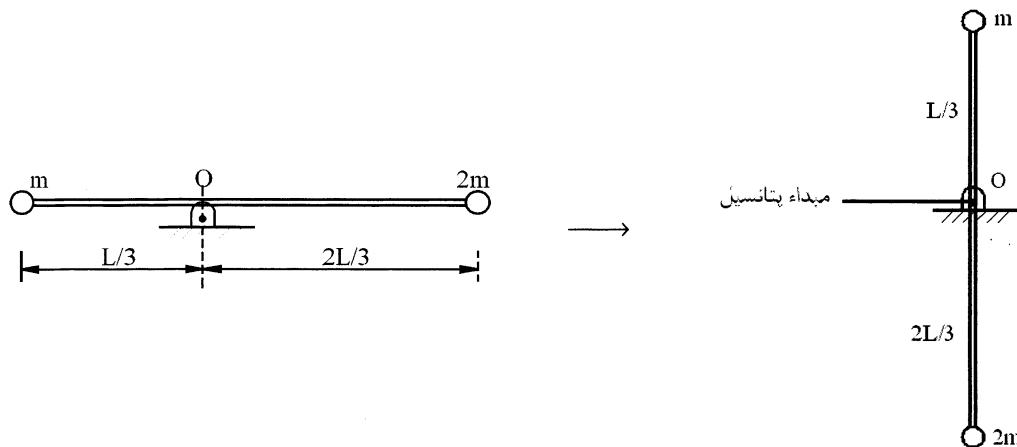
$$\frac{2g}{3L} \quad (3)$$

$$M_A = W \frac{\ell}{2} = I_A \alpha = \left(\frac{1}{12} \frac{W}{g} \ell^2 + \frac{W}{g} \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right) \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3g}{2\ell}}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۷)

به دو انتهای یک میله افقی بی وزن روی صفحه قائم جرم‌های m و $2m$ نصب شده است. این میله از حالت سکون افقی رها می‌گردد. وقتی به وضع قائم می‌رسد، کدام یک از نتایج زیرین صحیح است؟



$$2) \text{ سرعت زاویه‌ای میله برابر } \sqrt{\frac{2g}{L}} \text{ رادیان بر ثانیه است.}$$

$$3) \text{ شتاب زاویه‌ای برابر } \frac{2g}{L} \text{ رادیان برمذور ثانیه است.}$$

$$0 = 2mg\left(\frac{2L}{3}\right) = 4\frac{mgL}{3} > \frac{mgL}{3}$$

$$0 = mg\frac{L}{3}$$

لذا جرم $2m$ پایین می‌آید و جرم m بالا می‌رود. قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است، لذا داریم:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

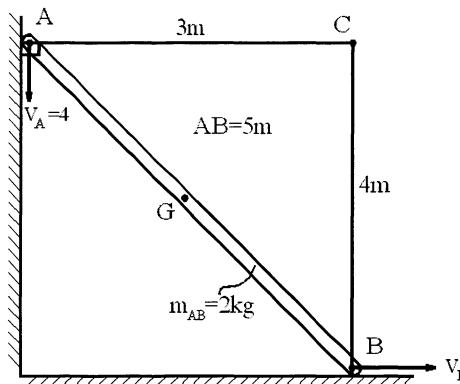
$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{L}{3}\right)^2 + \left(\frac{2L}{3}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{mL^2}{2}\omega^2 \\ V_g)_2 = mg\frac{L}{3} - 2mg\left(\frac{2L}{3}\right) = -mgL \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = m\frac{L^2}{2}\omega^2 - mgL = E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۴ - ۷۵)

در لحظه نشان داده در شکل نقطه A از میله باریک ۲ kg دارای سرعت $4\left[\frac{m}{s}\right]$ به سمت پایین می‌باشد. انرژی جنبشی میله کدام است؟



3.71 N.m (۱)

13.5 N.m (۲)

14.81 N.m (۳)

16.3 N.m (۴)

مرکز آنی دوران میله AB نقطه (C) محل تلاقی عمود بر سرعت‌های نقاط A و B می‌باشد.

$$v_A = 4\left[\frac{m}{s}\right] = AC\omega_{AB} = 3\omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{4}{3}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

$$v_B = BC\omega_{AB} = 4\omega_{AB} = 4\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_G = GC\omega_{AB} = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}\left[\frac{m}{s}\right]$$

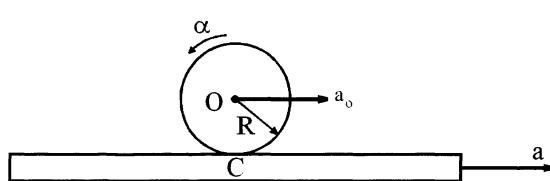
$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} \times 2 \times 5^2\right)\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{400}{27} \approx 14.8\text{[N.m]}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۷ - ۷۸)

تسمه‌ای با سرعت v و شتاب ثابت a به سمت راست حرکت می‌کند. بر روی این تسمه دیسکی نسبت به تسمه به سمت چپ می‌غلتد در حالی که شتاب کل مرکز دیسک به سمت راست است. نیروی اصطکاک بین تسمه و دیسک برابر است: (جرم دیسک برابر m و

ضریب اصطکاک بین تسمه و دیسک برابر μ و $I_{disk} = \frac{1}{2}mR^2$ است)



$\frac{1}{3}ma$ (۲) μmg (۱)

$\frac{1}{2}\mu mg$ (۴) $\frac{1}{2}ma$ (۳)

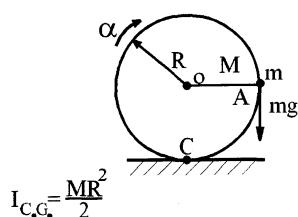
در مورد اصطکاک لغزشی همواره جهت آن، عکس حرکت می‌باشد. اما در اصطکاک غلتی اگر هیچ گشتاور محرکی روی دیسک غلتان نباشد نیروی اصطکاک غلتی در جهت عکس حرکت و اگر گشتاور محرکی روی دیسک غلتان باشد نیروی اصطکاک در جهت حرکت و یا در جهتی خواهد بود که با گشتاور محرک مقابله نماید.

$$\begin{cases} -ma_0 - F_f = 0 \Rightarrow ma_0 = -F_f = \frac{mR\alpha}{2} \\ \Rightarrow a_0 = a - R\alpha = \frac{R\alpha}{2} \Rightarrow a = \frac{3R\alpha}{2} \\ I_0\alpha + F_f R = 0 \Rightarrow \frac{mR^2}{2}\alpha + F_f R = 0 \\ \Rightarrow F_f = -\frac{mR}{2}\alpha = -\frac{mR}{2}\left(\frac{2a}{3R}\right) = -\frac{ma}{3} \end{cases} \Rightarrow F_f = \frac{ma}{3}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

در پیرامون دیسک یکتاخت به جرم M و شعاع R ذره‌ای با جرم m در وضع نشان داده شده نصب گردیده است. شتاب زاویه‌ای دیسک در لحظه آزادشدن از وضع نشان داده شده برابر است با:



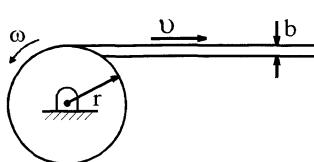
$$\begin{array}{ll} \frac{2mg}{(M+m)R} & (2) \\ \frac{mg}{(3M+2m)R} & (1) \\ \frac{4mg}{(M+4m)R} & (4) \\ \frac{2mg}{(3M+4m)R} & (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C &= I_c \alpha = mgR = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2 + mAC^2 \right) \alpha = \left(\frac{3MR^2}{2} + m(\sqrt{2}R)^2 \right) \alpha \\ &= \left(\frac{3M+4m}{2} \right) R^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2mg}{(3M+4m)R} \end{aligned}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۶)

هنگام کار چاپ، کاغذ با سرعت ثابت v زیر دستگاه چاپ کشیده می‌شود هرگاه شعاع کاغذ رول در هر لحظه با r نشان داده شود و ضخامت کاغذ b باشد، شتاب زاویه‌ای رول کاغذ کدام است؟



$$\begin{array}{ll} \frac{2}{3} \frac{bv^2}{\pi r^3} & (2) \\ \frac{1}{2} \frac{bv^2}{\pi r^3} & (1) \\ \frac{2}{\pi r^3} \frac{bv^2}{\pi r^3} & (4) \\ \frac{3}{2} \frac{bv^2}{\pi r^3} & (3) \end{array}$$

$$v = r\omega = \text{constant} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \frac{-v\dot{r}}{r^2}$$

$$\dot{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \approx \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

از آنجایی که در مدت $\frac{2\pi}{\omega}$ رول یک دور می‌چرخد و در اثر این چرخش شعاع رول به اندازه ضخامت کاغذ یعنی b کم می‌شود بنابراین

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{و} \quad \Delta r = -b$$

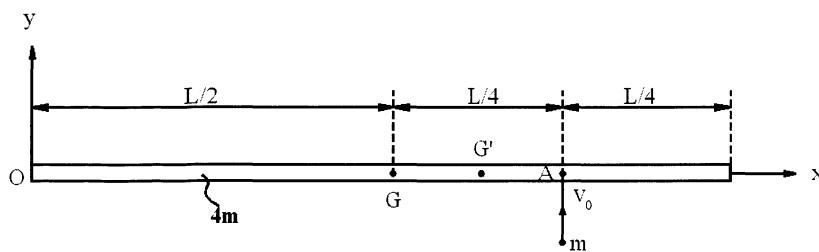
$$\dot{r} \approx \frac{-b}{2\pi} = \frac{-b\omega}{2\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{-v}{r^2} \left(\frac{-b\omega}{2\pi} \right) = \frac{bv}{2\pi r^2} \left(\frac{v}{r} \right) = \boxed{\frac{bv^2}{2\pi r^3}}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

اگر یک ذره به جرم m با میله به جرم $4m$ در موقعیت $\frac{1}{4}$ برخورد پلاستیک کامل کند، سرعت مرکز جرم میله را درست پس از برخورد پیدا کنید. (برخورد در سطح افق بدون اصطکاک رخ می‌دهد).

$$v_G = 0 \quad (1)$$



$$v_G = \frac{3}{11} v_0 \quad (2)$$

$$v_G = \frac{4}{11} v_0 \quad (3)$$

$$v_G = \frac{4}{23} v_0 \quad (4)$$

چون برخورد پلاستیک کامل است بنابراین پس از برخورد جرم m به جرم $4m$ می‌چسبد و مرکز جرم G به نقطه G' تغییر موقعیت می‌دهد. در دستگاه مختصات $0xy$ مختصات مرکز جرم $G(0, 0)$ و مختصات جرم $m\left(\frac{L}{2}, 0\right)$ پس از چسبیدن به میله $(0, \frac{3L}{4})$ خواهد بود، بنابراین:

$$x_{G'} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4m)\left(\frac{L}{2}\right) + m\left(\frac{3L}{4}\right)}{4m + m} = \frac{\frac{11mL}{4}}{5m} = \frac{11L}{20}$$

$$y_{G'} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{4m \times 0 + m \times 0}{4m + m} = 0$$

بنابراین مرکز جرم جدید یعنی نقطه G' در فاصله O از نقطه G برابر $\frac{11L}{20}$ خواهد بود.

قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای ضربه: $4m \times 0 + mv_0 = (4m + m)v_{G'} \Rightarrow v_{G'} = \frac{v_0}{5}$

در صورت مساله سرعت v_G خواسته شده است، بنابراین داریم:

$$v_{G'} = v_G + v_{G/G} \Rightarrow \frac{v_0}{5} = v_G + GG' \omega_{bar} \Rightarrow v_G = \frac{v_0}{5} - \frac{L}{20} \omega_{bar}$$

حال باید سرعت زاویه‌ای میله یعنی ω_{bar} را محاسبه نماییم.

نیروی ضربه‌ای وارد از جرم m در نقطه A به میله وارد می‌شود لذا گشتاور این نیرو حول نقطه A صفر است. بنابراین قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه A برقرار است.

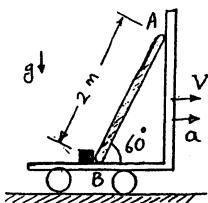
$$H_A)_1 = H_A)_2 \Rightarrow 0 = I_G \omega_{bar} - (4m)v_G \left(\frac{L}{4}\right) = \frac{1}{12}(4m)L^2 \omega_{bar} - mL v_G \Rightarrow \omega_{bar} = \frac{3v_G}{L}$$

$$\Rightarrow v_G = \frac{v_0}{5} - \frac{L}{20} \left(\frac{3v_G}{L}\right) \Rightarrow \frac{23v_G}{20} = \frac{v_0}{5} \Rightarrow \boxed{v_G = \frac{4}{23} v_0} \Rightarrow \omega_{bar} = \frac{3}{L} \left(\frac{4}{23} v_0\right) = \boxed{\frac{12}{23} \frac{v_0}{L}}$$

لذا جواب گزینه (۴) می‌باشد.

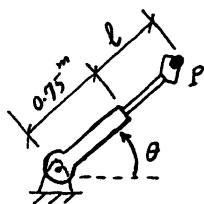
تست‌های سال (۸۲ - ۸۳)

- ۱- میله AB به طول 2 متر بر روی یک چهارچرخه که بر روی سطحی افقی در حرکت است قرار داده شده است. در صورتی که میله با افق زاویه 60 درجه داشته و ضریب اصطکاک سکون در نقطه B برابر با $\mu_s = 0.5$ و در نقطه A برابر با $\mu_d = 0.0$ باشد، حداقل شتاب منفی چهارچرخه را برای این که میله بر روی چهارچرخه نلغزد تعیین نمایید. (میله AB همگن بوده و مرکز جرم آن در وسط میله قرار دارد.)



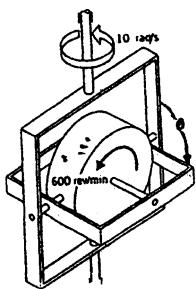
$$\begin{array}{ll} -1.866g \left[\frac{m}{s^2} \right] & (2) \\ -2g \left[\frac{m}{s^2} \right] & (1) \\ -1.577g \left[\frac{m}{s^2} \right] & (4) \\ -2.5g \left[\frac{m}{s^2} \right] & (3) \end{array}$$

- ۲- در مکانیزم رباتیکی شکل مقابل طول بازوی دوران گننده 0.75 متر است. در موقعیت نشان داده شده چنانچه سرعت دوران بازوی دوران 10 درجه بر ثانیه باشد و بازوی لغزندۀ در موقعیتی که طول l برابر 0.5 متر باشد، دارای سرعت خطی 0.2 متر بر ثانیه و شتاب خطی 0.3- متر بر مجدور ثانیه باشد اندازه شتاب گیره P کدام گزینه است؟



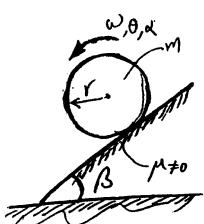
$$\begin{array}{ll} 0.345 \left[\frac{m}{s^2} \right] & (2) \\ 0.338 \left[\frac{m}{s^2} \right] & (1) \\ 0.405 \left[\frac{m}{s^2} \right] & (4) \\ 0.396 \left[\frac{m}{s^2} \right] & (3) \end{array}$$

- ۳- دیسک مربوط به ژیرسکوپ نشان داده در شکل در این لحظه دارای سرعت زاویه ثابت $600 \left[\frac{\text{rev}}{\text{min}} \right]$ در جهت نشان داده شده قاب بیرونی دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ در جهت نشان داده شده می‌باشد. چنانچه قاب داخلی در این لحظه در موقعیت $\theta = 60^\circ$ بوده و با سرعت و شتاب زاویه‌ای ثابت $\ddot{\theta} = 10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$ و $\dot{\theta} = -5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ حرکت نماید. اندازه شتاب زاویه‌ای مطلق دیسک چقدر است؟



$$\begin{array}{ll} 433.17 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] & (2) \\ 289.10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] & (1) \\ 554.10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] & (4) \\ 626.48 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] & (3) \end{array}$$

- ۴- استوانه‌ای به جرم m و شعاع r روی یک سطح شیبدار با زاویه β نسبت به افق در حال حرکت است. بیایید: ۱- تعیین حداقل ضریب اصطکاک μ برای ایجاد حرکت غلتش خالص استوانه و ۲- در صورتی که نیروی اصطکاک از f_{\max} بیشتر باشد، شتاب زاویه‌ای حرکت استوانه چقدر است؟

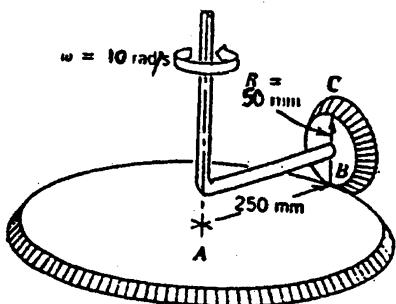


$$\begin{array}{ll} \alpha = \frac{g}{r} \sin \beta, \quad \mu \geq \frac{1}{3} \cos \beta & (2) \quad \alpha = \frac{2g \mu \cos \beta}{r}, \quad \mu \geq \frac{\tan \beta}{3} & (1) \\ \alpha = \frac{2\mu g}{3r} \cos \beta, \quad \mu \geq \frac{\tan \beta}{3} & (4) \quad \alpha = \frac{2g}{r} \sin \beta, \quad \mu \geq \frac{2}{3} \sin \alpha & (3) \end{array}$$

۶۳ | دینامیک اجسام صلب | مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۵- چرخ دنده B آزادانه به دور محورش با سرعت زاویه‌ای ثابت $10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ در جهت نشان داده شده در شکل می‌چرخد. چرخ دنده

ثابت است، اندازه سرعت نقطه C چقدر است؟



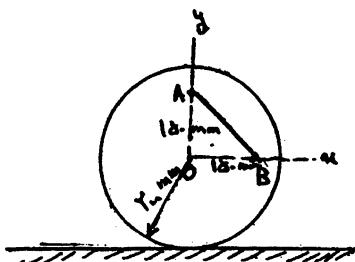
$$0.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (1)$$

$$2.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

$$5.0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

$$3.0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (4)$$

۶- دیسک مدور بدون لغزش به طرف چپ می‌غلتد. اگر $\ddot{a}_{A/B} = -2.7 \hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ باشد شتاب مرکز O دیسک را به دست آورید.



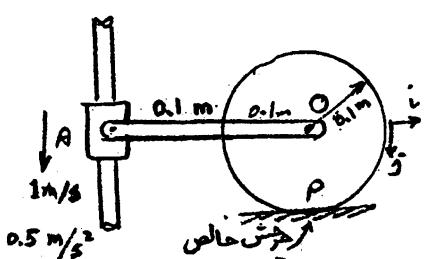
$$\ddot{a}_o = 0.824 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (1)$$

$$\ddot{a}_o = -0.824 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (2)$$

$$\ddot{a}_o = -1.8 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (3)$$

$$\ddot{a}_o = 1.8 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (4)$$

۷- برای موقعیت نشان داده شده لغزنده A، سرعتی برابر $1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ هر دو به طرف پایین دارد. شتاب زاویه چرخ را در این لحظه به دست آورید.



$$5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] \quad (1)$$

$$0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] \quad (2)$$

$$50 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] \quad (3)$$

$$25 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] \quad (4)$$

۸- دیسکی را که دارای سرعت زاویه‌ای ω است بر روی زمین قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک سطح زمین و دیسک μ به اندازه‌ای است که باعث می‌شود دیسک بر روی زمین بغلتد. سرعت زاویه‌ای دیسک با گذشت زمان:

۱) تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

۲) اصطکاک باعث افزایش آن می‌شود.

۳) در مورد تغییرات آن نمی‌توان قضاوت کرد.

۴) به دلیل وجود اصطکاک کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی

۱ - گزینه ۴ صحیح می باشد.

میله به همراه چهار چرخه با شتاب منفی a حرکت می کند و حرکت انتقالی است. حداقل شتاب زمانی به دست می آید که میله در آستانه لغزش قرار گیرد.

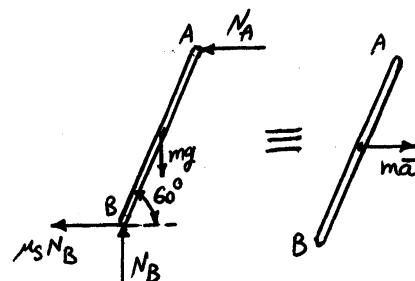
$$\begin{cases} N_B = mg \\ -(\mu_S N_B + N_A) = ma \end{cases}$$

$$\sum M_A = ma \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ \rightarrow -\mu_S N_B \ell \sin 60^\circ - N_B \ell \cos 60^\circ + mg \frac{\ell}{2} \cos 60^\circ = ma \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow -\mu_S mg \ell \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{\ell}{2} + mg \frac{\ell}{2} \times \frac{1}{2} = ma \frac{\ell}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow -g \left(\mu_S \sqrt{3} + \frac{1}{2} \right) = a \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = -g \left(2\mu_S + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= -g \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -1.577 g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$



۲ - گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\vec{a}_p = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

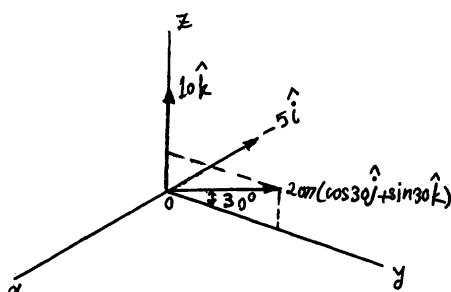
رابطه شتاب در مختصات قبلی عبارت است از:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\theta} = \frac{10 \times \pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ r = 0.75 + 0.5 = 1.25 \\ \dot{r} = 0.2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \\ \ddot{r} = -0.3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a}_p = \left(-0.3 - 1.25 \times \left(\frac{\pi}{18} \right)^2 \right) \hat{e}_r + \left(1.25 \times 0 + 2 \times 0.2 \times \frac{\pi}{18} \right) \hat{e}_\theta = -0.3381 \hat{e}_r + 0.0698 \hat{e}_\theta$$

$$|a_p| = 0.3452 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

با فرض $\ddot{\theta} = 0$ (در سوال نیامده است)

۳ - گزینه (۴) صحیح می باشد.



$$600 \left[\frac{\text{rev}}{\text{min}} \right] = \frac{2\pi \times 600}{60} = 20 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

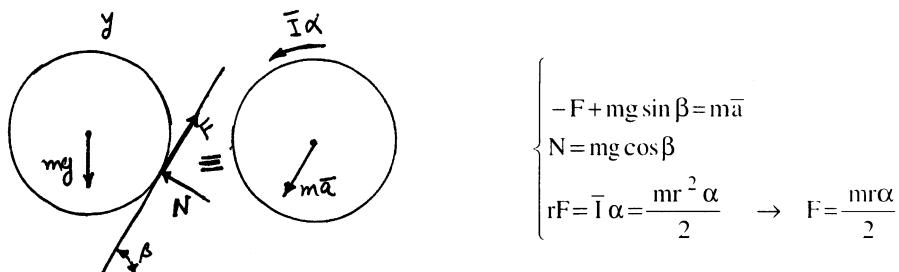
$$\vec{\alpha} = \dot{\omega} = \dot{\theta}(-\hat{i}) + \omega \times [(-5\hat{i}) + 10\pi(\sqrt{3}\hat{j} + \hat{k})]$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\omega} = -10\hat{i} - 50\hat{j} + 100\sqrt{3}\pi(-\hat{i}) = -(10 + 100\sqrt{3}\pi)\hat{i} - 50\hat{j}$$

$$\alpha = \sqrt{(10 + 100\sqrt{3}\pi)^2 + (50)^2} \approx 554.1 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$$

۶۵ | دینامیک اجسام صلب | موسسه آموزش عالی آزاد پارسه

۴ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



با فرض حرکت غلتش خالص داریم: $\bar{a} = r\alpha$

$$-\frac{m\bar{a}}{2} + mg \sin \beta = m\bar{a} \rightarrow \frac{3m\bar{a}}{2} = mg \sin \beta \rightarrow \bar{a} = \frac{2g \sin \beta}{3}$$

$$F = \frac{m\bar{a}}{2} = \frac{mg \sin \beta}{3} \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \beta \rightarrow \mu_s \geq \frac{\tan \beta}{3}$$

اگر $F \geq F_{max}$ باشد اصطکاک لغزشی و حرکت لغزش و غلتش همزمان خواهد بود.

$$F = \mu_k mg \cos \beta$$

$$\mu_k mg \cos \beta = \frac{m r \alpha}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2 \mu_k g \cos \beta}{r}$$

۵ - گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

$$v = r\omega$$

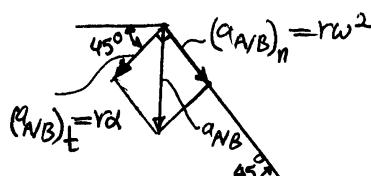
$$v_B = 0.25 \times 10 = 2.5 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$v_B = 2r\omega = 2v_B = 5 \left[\frac{m}{s} \right]$$

۶ - گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

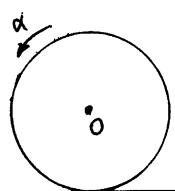
با ترسیم شتاب عمودی و مماسی بین نقاط A و B می‌بینیم که $(a_{A/B})_t = r\alpha$, $(a_{A/B})_n = r\omega^2$ به ترتیب سرعت و

شتاب زاویه‌ای چرخ و $r = 0.15\sqrt{2}$ فاصله بین نقاط B و A است که برآیند این دو بردار باید $\hat{j} - 2.7\hat{j}$ شود، پس:



$$\begin{cases} r\alpha = r\omega^2 \\ \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = 2.7 \rightarrow r\alpha = r\omega^2 = \frac{2.7}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

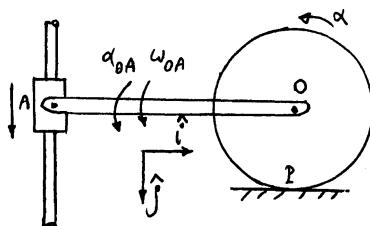
$$\alpha = \frac{2.7}{\sqrt{2} \times 0.15\sqrt{2}} = \frac{2.7}{0.3} = 9 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$



$$\bar{a}_0 = R\alpha \hat{i} = 0.2 \times 9\hat{i} = -1.8\hat{i} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

۷ - گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

سرعت نقطه O چرخ در جهت \hat{i} خواهد بود و سرعت نقطه A به سمت پایین در جهت \hat{j} است پس مرکز آنی دوران میله OA نقطه O خواهد بود و:



$$\omega_{OA} = \frac{1}{0.2} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \leftarrow \quad v_A = r_{OA} \omega_{OA}$$

$$\ddot{a}_{A/O} = 0.5 \hat{j}$$

$$\ddot{a}_{A/O} = 0.2 \times 5^2 \hat{i} + 0.2 \alpha_{OA} \hat{j}$$

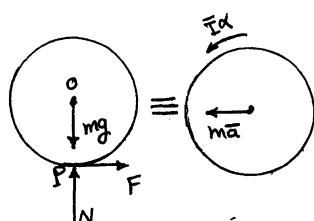
$$\ddot{a}_O = -a_O \hat{i} = -0.1 \alpha \hat{i}$$

$$\ddot{a}_A = \ddot{a}_O + \ddot{a}_{A/O}$$

$$0.5 \hat{j} = 5 \hat{i} + 0.2 \alpha_{OA} \hat{j} - 0.1 \alpha \hat{i} \rightarrow 5 - 0.1 \alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 50 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]}$$

۸ - گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

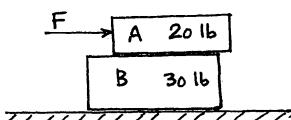
لذا زاویه شتاب زاویه‌ای دیسک صفر است.



$$\sum M_P = I_O \alpha \rightarrow 0 = I_O \alpha \rightarrow \alpha = 0$$

تست‌های سال (۸۳ - ۸۴)

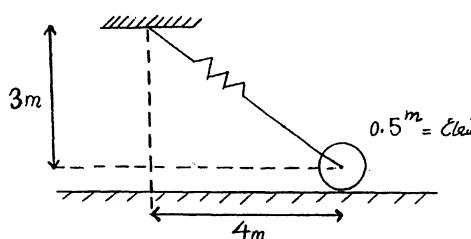
- ۱- بلوک B بر روی یک سطح صاف (بدون اصطکاک) قرار دارد. ضریب اصطکاک استاتیکی و دینامیکی بین بلوک A و B برابر با $\frac{f_t}{s^2}$ و $\mu_k = 0.3$ می‌باشد. چنانچه یک نیروی افقی برابر با $F = 5016 \text{ lb}$ به بلوک A وارد شود، شتاب بلوک B بر حسب کدام است؟



$$5.48 \quad (2) \quad 2.57 \quad (1)$$

$$6.44 \quad (4) \quad 6.11 \quad (3)$$

- ۲- یک استوانه صلب همگن از وضعیت نشان داده شده از حال سکون رها می‌شود. جرم استوانه 12 kg می‌باشد. سختی فنر E_{mod} لبه و طول آزاد آن 1 m می‌باشد. سرعت زاویه‌ای استوانه بعد از این که 1 rad جابه‌جا شود چقدر است؟ (بر حسب sec red)



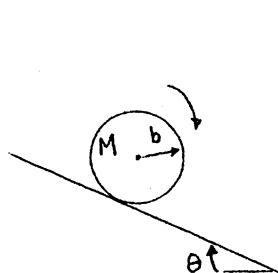
$$0.5 \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

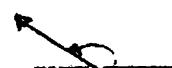
$$1.5 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

- ۳- استوانه‌ای به شعاع b و جرم M از سطح شیب‌داری به شیب θ به طرف پایین می‌غلتند. در صورتی که حرکت بدون لغزش و به صورت غلتش صرف باشد، درباره نوع نیروی اصطکاک اندازه و جهت آن کدام عبارت صحیح است؟



$$f = \frac{Mg \sin \theta}{3}$$



(۱) لغزشی

$$f = \frac{Mg \sin \theta}{3}$$



(۲) غلتشی:

$$f = \mu_r Mg \sin \theta$$



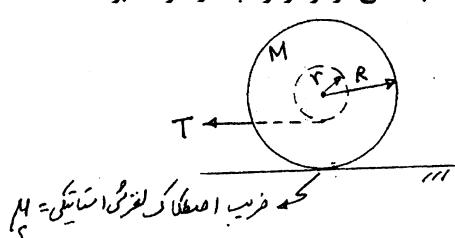
(۳) غلتشی:

$$f = \mu_r Mg \sin \theta$$



(۴) لغزشی:

- ۴- قرقه‌ای با شعاع R و جرم M در دست است. ریسمانی که دور قرقه پیچیده شده است مانند شکل از شعاع محور r کشیده می‌شود. برای آن که قرقه هیچ‌گاه بر روی زمین نلغزد و فقط غلتش داشته باشد، ماکزیمم شتاب خطی مرکز قرقه چقدر خواهد بود؟



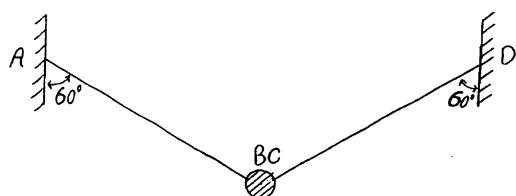
$$a_{\max} = 2 \left(\frac{R-r}{2r+R} \right) \mu g \quad (2)$$

$$a_{\max} = \frac{R}{R+r} \mu g \quad (1)$$

$$a_{\max} = 2 \left(\frac{2r+R}{R-r} \right) \mu g \quad (4)$$

$$a_{\max} = 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \mu g \quad (3)$$

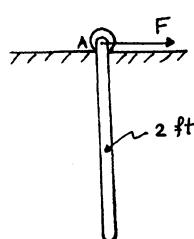
۵- کره کوچکی به جرم m مطابق شکل با دو سیم AB و CD نگه داشته شده است. سیم AB را آن گاه می‌بریم کشش در سیم CD و شتاب کره دست ب بعد از بریده شدن سیم AB به ترتیب از راست به چپ عبارت خواهد بود از:



$$\begin{array}{ll} 0.5g, \frac{W}{2} & 0.5g, \frac{W}{3} \\ 0.866g, \frac{W}{2} & 0.866g, \frac{W}{3} \end{array}$$

۶- میله‌ای به طول 2 ft و وزن 10 lb در حالت ایست می‌باشد. در این لحظه نیروی افقی $F=15\text{ lb}$ به نقطه A وارد می‌شود.

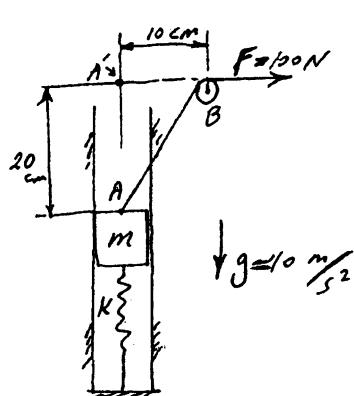
شتاب نقطه A در همین لحظه بر حسب $\frac{ft}{s^2}$ کدام است؟



$$\begin{array}{ll} 117 & 105 \\ 231 & 193 \end{array}$$

۷- وزنه یک کیلوگرمی بر روی فنر $K=100\frac{N}{m}$ در حالت سکون قرار دارد. اگر نیروی ثابت افقی $F=100\text{ N}$ از طریق ریسمان و

قرقره B بر وزنه اعمال گردد، سرعت آن در نقطه A' کدام است؟



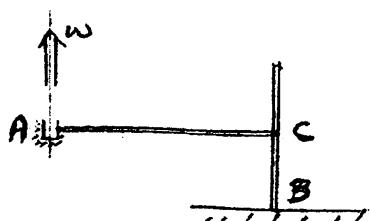
(۱) صفر

$$4.10\frac{m}{s}$$

$$4.55\frac{m}{s}$$

(۴) نیروی F برای رساندن وزنه به نقطه A' کافی نیست.

۸- چرخ C بدو ن لغزش می‌غلتد در حالی که محور آن مطابق شکل با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. محور دوران چرخ منطبق بر است.



(۱) محور ω

(۲) خط AB

(۳) خط AC

(۴) محور دورانی وجود ندارد.

پاسخ تشریحی

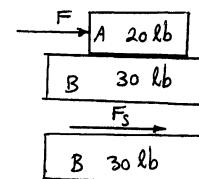
۱ - گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

فرض اول: هر دو بلوک با هم حرکت می‌کنند.

$$F = 5016 \text{ lb}$$

$$= \frac{F}{m} = \frac{5016}{\frac{50}{32.2}} = 3230.304 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right] \rightarrow$$

$$F_S = \frac{30}{32.2} a = 3009.6 \text{ lb} \leq \mu_S W = 0.4 \times 20 = 8$$



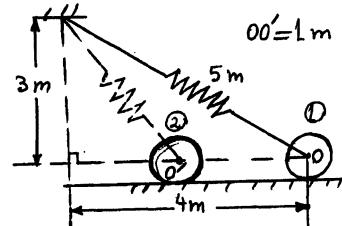
لذا فرض اول اشتباه است. فرض دوم بلوک A روی بلوک B می‌لغزد و A و B نسبت به هم حرکت نسبی دارند.

$$a_B = \frac{6}{\frac{30}{32.2}} = 6.44 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right]$$

۲ - گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

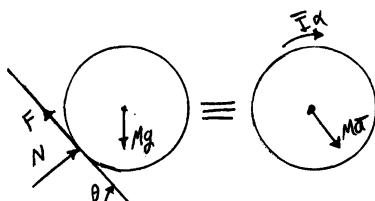
قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_{e_1} = \frac{1}{2} 2 \times (5-1)^2 = 16 \\ T_2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{2} + mr^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3mr^2}{2} \right) \omega^2 \\ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 12 (0.5)^2 \omega^2 = 2.25 \omega^2 \\ V_{e_2} = \frac{1}{2} 2 \left(3\sqrt{2-1} \right)^2 = 10.515 \end{cases}$$



$$E_1 = E_2 \rightarrow T_1 + V_{e_1} = T_2 + V_{e_2} \rightarrow 0 + 16 = 2.25 \omega^2 + 10.515 \rightarrow \omega^2 = 2.4379 \rightarrow \boxed{\omega = 1.5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]}$$

۳ - گزینه (۲) صحیح می‌باشد.



$$N = Mg \cos \theta$$

$$Mg \sin \theta - F = Ma$$

$$r F = I \alpha = \frac{Mr^2}{2} \alpha \rightarrow F = \frac{Mr \alpha}{2}$$

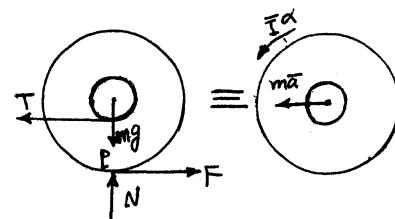
با فرض حرکت غلتیش بدون لغزش داریم: $\bar{a} = r \alpha$

$$\left. \begin{aligned} Mg \sin \theta - F &= Ma \\ F &= \frac{Ma}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow Mg \sin \theta - F = 2F \rightarrow F = \frac{Mg \sin \theta}{3}$$

۴ - گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

با فرض غلتش بدون لغزش نتیجه می‌شود: $\bar{a} = R \alpha$

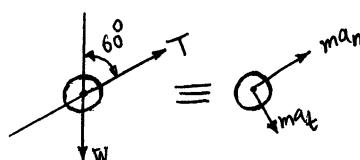
$$\begin{aligned} T - F &= m\bar{a} \\ N &= mg \\ \sum M_P &= \bar{I}_P \alpha \rightarrow T(R - r) = \bar{I}_P \alpha \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{I}_P}{(R - r)R} \bar{a} - F = m\bar{a} \\ \left(\frac{\bar{I}_P}{(R - r)R} - m \right) \bar{a} = F \leq \mu_s mg \end{array} \right. \rightarrow \bar{a} \leq \frac{\mu_s mg}{\frac{\bar{I}_P}{(R - r)R} - m}$$



با فرض این که $\bar{I}_P = \frac{mR^2}{2} + mR^2$ می‌باشد و اگر از ممان اینرسی طناب حول قرقره صرفنظر شود نتیجه می‌شود:

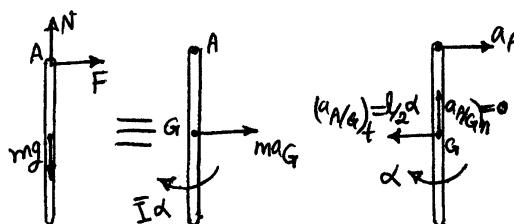
$$\bar{a}_{max} = \frac{2\mu_s g(R - r)}{R + 2r}$$

۵ - گزینه (۴) صحیح می‌باشد.



$$\left\{ \begin{array}{l} T - W \cos 60^\circ = \frac{W}{g} a_n = 0 \rightarrow T = \frac{W}{2} \\ W \sin 60^\circ = \frac{W}{g} a_t \rightarrow a_t = g \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866g \end{array} \right.$$

۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \bar{a}_{G/A} = \bar{a}_A + (\bar{a}_{G/A})_n + (\bar{a}_{G/A})_t$$

$$a_G = a_A - \frac{\ell}{2}\alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = mg \\ F = m \left(a_A - \frac{\ell}{2}\alpha \right) \rightarrow \frac{F}{m} + \frac{\ell}{2}\alpha = a_A \rightarrow a_A = \frac{F}{m} + \frac{3F}{m} = \frac{4F}{m} \\ \sum M_G = \bar{I}\alpha \rightarrow F \frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{12}\alpha \rightarrow \alpha = \frac{6F}{m\ell} \end{array} \right.$$

$$a_A = \frac{4 \times 15}{32.2} = 193.2 \left[\frac{ft}{s^2} \right]$$

بنابراین گزینه (۳) جواب صحیح است.

۷ - گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

$$\sqrt{20^2 + 10^2} - 10 = 12.361 [cm]$$

۷۱ دینامیک اجسام صلب | آزاد پارسه | مؤسسه آموزش عالی آزاد

$$kx_1 = mg \rightarrow x_1 = \frac{1 \times 10}{100} = 0.1 \text{ m}$$

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = -mg \times 0.2 = -1 \times 10 \times 0.2 = -2 \text{ [J]} \\ V_e)_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} 100 \times 0.1^2 = 0.5 \text{ [J]} \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} mv^2 \\ V_g)_2 = 0 \\ V_e)_2 = \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2} \times 100 (0.2 - 0.1)^2 = 0.5 \text{ [J]} \end{cases}$$

$$U = Fd = 100 \times 0.12361 = 12.361 \text{ [J]}$$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \rightarrow 12.361 = (0.5v^2 - 0) + (0 + 2) + (0.5 - 0.5) \rightarrow 0.5v^2 = 10.361 \rightarrow v = 4.552 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

- گزینه (۲) صحیح می باشد.

محور دوران منطبق بر خط AB است، چرا که دوران دیسک همانند غلتیش محض یک مخروط با محور AC و یا ل AB روی یک سطح مخروطی با محور عمودی و یا ل AB است، لذا جواب گزینه ۲ می باشد.

پاداًش